

Quantitative Analysis - Lecture #1

הרצאה במסגרת קורס הכנה לבחינות האיגוד העולמי
למומחי סיכונים (GARP) 2013 להסמכה הבינלאומית
"מנהל סיכונים פיננסיים" (FRM®)

רועי פולניצר, MBA (financ.), FRM holder
roip@intrinsicvalue.co.il

סבב היכרויות (מי נגד מי)

1. שם פרטי + משפחה
2. ג'וב טייטל + מקום עבודה
3. תארים/הסמכות + מוסד אקדמי
4. כמה זמן עבר מאז הקורס האחרון בסטטיסטיקה (אקונומטריקה לא נחשב)

מבנה ההרצאה

• אלגברה של מאורעות

- הפסקה (5-10 דקות)

- הסתברויות

- הפסקה (5-10 דקות)

- משתנים מקריים

- הפסקה (5-10 דקות)

- התפלגויות בדידות

- הביתה

1. אלגברה של מאורעות **(Algebra of Events)**

הגדרות

1. ניסוי מקרי (random experiment) - פעולה שתוצאתה לא ניתנת לניבוי ודאי (הטלת קוביה).
2. מרחב מדגם (sample space) - מסומן ב- Ω - זהו אוסף כל התוצאות האפשריות של הניסוי. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
3. נקודת מדגם (sample point) - תוצאה אפשרית של הניסוי.
4. מאורע (event) - קבוצה חלקית של Ω (למשל רק תוצאות זוגיות).
5. מאורע פשוט (simple event) - מכיל נקודת מדגם אחת בלבד (מאורעות פשוטים הם זרים, משמע, אין להם נקודה משותפת).
6. מאורע ריק (empty event) - מאורע בלתי אפשרי (אין בו נקודות מדגם). מסמנים ב- ϕ . $\phi = \{ \}$

דוגמאות

- איך רושמים את Ω בהטלת 2 קוביות?
$$\Omega = \{(x, y); x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
- מאורע ששתי הקוביות זהות:
$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$
- מאורע שסכום התוצאות הוא 7:
$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$
- מאורע שסכום התוצאות קטן מ-4:
$$C = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$
- מאורע שסכום התוצאות הוא 12:
$$D = \{(6, 6)\}$$
- לבחור ועד של 3 מתוך 40 ללא חשיבות לסדר:

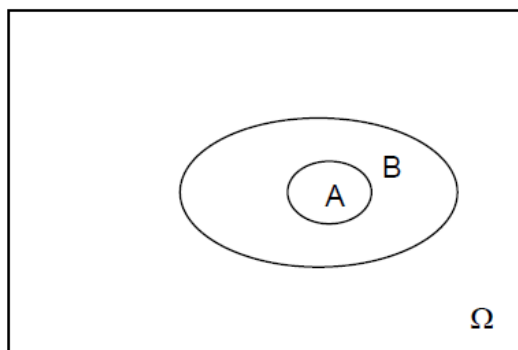
$$\binom{40}{3} = \frac{40!}{3! \times (40-3)!} = 9,880$$

הגדרות

7. מאורעות זהים- יש בהם אותם איברים $A=B$

8. הכלה $A \subset B$ (נאמר ש- A מוכל ב- B אם ורק אם כל איבר ששייך ל- A , שייך גם ל- B).

if $\omega \in A$ and $\omega \in B$, then $A \subset B$

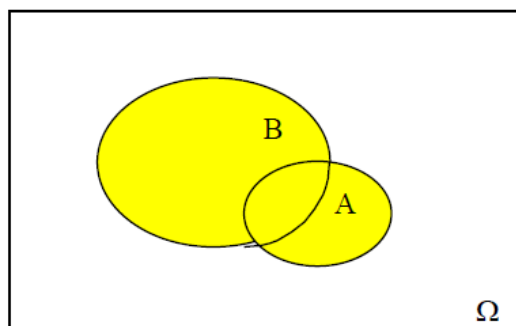


- דיאגרמת ון (Venn): A מוכל ב- B
- יחס ההכלה הוא רפלקסיבי (קרי, כל מאורע מוכל בעצמו $A \subset A$) וטרנזיטיבי

if $A \subset B$ and $B \subset C$, then $A \subset C$

אלגברה של מאורעות

- איחוד (union) - כמו (+), $A \cup B = A + B$, לפחות אחד מהם קרה.
 $A \cup B = \{\omega; \omega \in A \text{ or } \omega \in B \text{ or both}\}$



$$2 + 3 = 3 + 2$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- חוק החילוף:

$$5 + (2 + 8) = (5 + 2) + 8$$

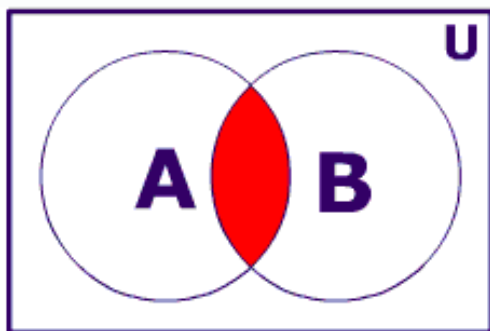
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

- חוק הקיבוץ:

אלגברה של מאורעות

- חיתוך (intersection) - כמו $(\times)$, $A \cap B = A \times B$.

$$A \cap B = \{\omega; \omega \in A \text{ and } \omega \in B\}$$



$$2 \times 3 = 3 \times 2$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- חוק החילוף:

- חוק הקיבוץ:

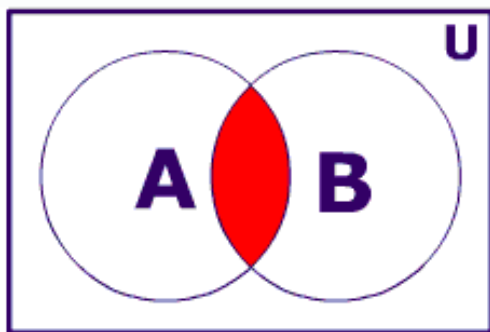
$$5 \times (2 \times 8) = (5 \times 2) \times 8$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

אלגברה של מאורעות

- חיתוך (intersection) - כמו $(\times)$, $A \cap B = A \times B$.

$$A \cap B = \{\omega; \omega \in A \text{ and } \omega \in B\}$$



- חוק הפילוג:

$$2 \times (3 + 5) = (2 \times 3) + (2 \times 5)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

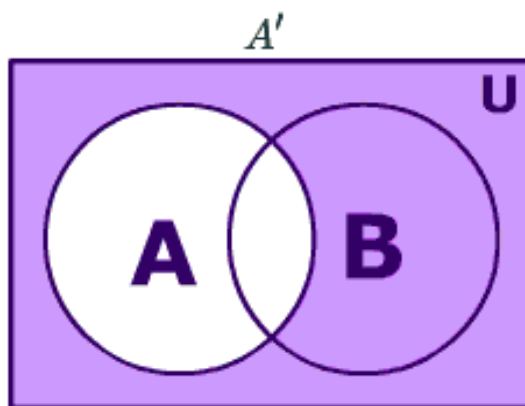
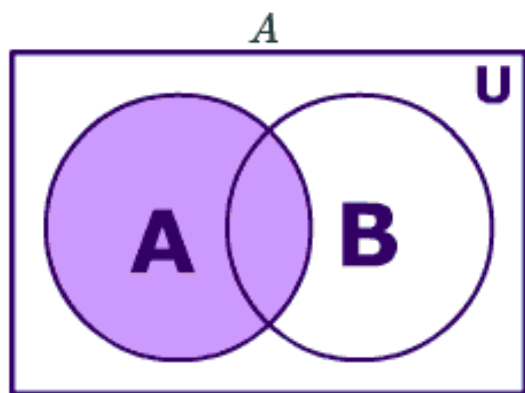
- ומשהו שאין לו מקבילה באלגברה:

$$2 + (3 \times 5) \neq (2 + 3) \times (2 + 5)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

אלגברה של מאורעות

- מאורעות משלימים (exhaustive events) - $\bar{A} = A' = A^c$ הוא המאורע המשלים של A.
$$\bar{A} = \{\omega; \omega \notin A \text{ or } \omega \in \Omega\}$$



• ולכן: 1. $A = \bar{\bar{A}}$

2. if $A \subset B$ then $\bar{B} \subset \bar{A}$

אלגברה של מאורעות

- מאורעות זרים (mutually exclusive events) - נאמר כי A ו-B זרים אם $A \cap B = \phi$
- דוגמאות: 1. $A \cap \bar{A} = \phi$ 2. $\bar{\Omega} = \phi$ 3. $\bar{\phi} = \Omega$
- אם יהי $A \cap \Omega$ ו- ϕ המאורע הריק, אזי:
1. $A \cup \phi = A$ 2. $A \cap \phi = \phi$ 3. $A \cup \Omega = \Omega$
4. $A \cap \Omega = A$ 5. $\phi \cap \phi = \phi$ 6. $\phi \cup \phi = \phi$
- כזכור, החיתוך של מאורעות מוכל בכל אחד מהמאורעות.
if $A \cap B = \phi$, then $\phi \subset A$ and $\phi \subset B$

חוקי דה מורגן (De Morgan's laws)

1. המשלים של האיחוד = חיתוך המשלימים

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

2. המשלים של החיתוך = איחוד המשלימים

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

• תאור מאורעות כאיחוד של מאורעות זרים לצורך חישוב הסתברויות:

• נאמר כי $A_1, \dots, A_n$ היא חלוקה של Ω אם:

$$1. \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \quad (\text{מקביל ל-} \Sigma \text{ באלגברה})$$

2. המאורעות הם זרים בזוגות

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

חלוקות (Partitions)

• אם תהי $A_1, \dots, A_n$ חלוקה של Ω ואם יהי מאורע $B \subset \Omega$

$$\text{אזי: } B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$$

• הסבר:
$$B \cap \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] = B \cap [A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n] =$$

$$(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n) = \bigcup_{i=1}^n B \cap A_i$$

• וזה אוסף של קבוצות זרות.

אקסיומות ההסתברות

• אם נסמן את ההסתברות של מאורע A כ- $P(A)$:

1. ההסתברות קטנה או שווה ל-1: $P(A) \geq 0$

2. המאורע הוודאי: $P(\Omega) = 1$

3. אם המאורעות הם זרים בזוגות אזי ההסתברות של האיחוד שווה לסכום ההסתברויות (אדיטיביות בת מניה).

if $A_i \cap A_j = \phi, \forall i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$

$$\text{then } P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

תכונות פונקציית ההסתברות

$$P(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = \phi \cup \phi \cup \dots \Rightarrow P(\phi) = P(\phi) + P(\phi) + \dots \quad 1. \\ \Rightarrow 0 = P(\phi) + P(\phi) + \dots \Rightarrow P(\phi) = 0$$

2. אדיטיביות סופית – אם יהיו $A_1, \dots, A_n$, n מאורעות זרים אזי

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n] = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \phi \cup \phi \cup \phi \quad \text{עד אינסוף}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(\phi) + \dots + P(\phi) \quad \text{עד אינסוף}$$

$$= \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

3. כל מאורע ניתן לכתיבה כאיחוד של מאורעות זרים

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = B \cap (A \cup \bar{A}) = B \cap \Omega = B$$

תכונות פונקציית ההסתברות

if $A \subset B$ then $P(A) \leq P(B)$.4

$$B = (\bar{A} \cap B) \cup A$$

$$P(B) = P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B), \quad P(\bar{A} \cap B) \geq 0 \\ = P(B) \geq P(A)$$

if $P(A) \leq 1$ then $A \subset \Omega$.5

$$P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow P(A) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

if $A \subset \Omega$ then $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.6

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) \leq 1 = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

תכונות פונקציית ההסתברות

7. ההסתברות של איחוד מאורעות כלשהם $A, B \subset \Omega$ שווה:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

נוכיח:

$$A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$$

$$(1) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$$

$$(2) \quad P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

$$\Rightarrow P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$$

8. ההסתברות של האיחוד שווה או קטנה מסכום ההסתברויות

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

תרגיל כיתה 1

• אם יהיו A ו-B מאורעות כך ש:-

$$P(A) = \frac{3}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

• מצא את:

$$P(A \cup B) = ?$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = ?$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = ?$$

$$P(A \cap \overline{B}) = ?$$

$$P(\overline{A \cap B}) = ?$$

$$P(\overline{A} \cap B) = ?$$

פתרון תרגיל כיתה 1

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{5}{6}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{7}{30}$$

דוגמא 1

- אם נתון ש-:

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$$

- האם A ו-B הם מאורעות זרים?

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} > 1$$

- לפיכך, A ו-B הם מאורעות לא זרים.

- נזכיר כי עבור מאורעות זרים

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \leq 1$$

תרגיל כיתה 2

$$P(A) = \frac{2}{7}, \quad P(B) = \frac{1}{9}$$

• אם נתון ש-:

• האם ייתכן ש- $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$?

פתרון תרגיל כיתה 2

• אם נתון ש-:

$$P(A) = \frac{2}{7}, \quad P(B) = \frac{1}{9}$$

• האם ייתכן ש- $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$?

$$P(A) + P(B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{9} < \frac{1}{2} = P(A \cup B)$$

• אם A ו-B הם מאורעות זרים, אזי

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B)$$

• אם A ו-B הם מאורעות לא זרים, אזי

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

הפסקה (5-10 דקות)

מבנה ההרצאה

- אלגברה של מאורעות
- הפסקה (5-10 דקות)
- **הסתברויות**
- הפסקה (5-10 דקות)
- משתנים מקריים
- הפסקה (5-10 דקות)
- התפלגויות בדידות
- הביתה

2. הסתברויות

(Probabilities)



הסתברות שולית (Marginal Probability)

- ההסתברות השולית שמאורע A יקרה מסומנת כ: $P(A)$
- ההסתברות המשלימה לה, קרי שמאורע A לא יקרה מסומנת כ:-:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- למשל, בהינתן שההסתברות השולית לחדלות פירעון (Marginal Probability to Default) של חברה מסוימת תוך שנה שווה ל:-:

$$P(D) = 0.2$$

- הרי שההסתברות המשלימה לה, כלומר, ההסתברות השולית לשרידות (Marginal Probability to Survival) של אותה חברה באותה שנה שווה ל:-:

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.2 = 0.8$$

הסתברות שולית (Marginal Probability)

- הטבלה הבאה מציגה את ההסתברות השוליות לחדלות פירעון עבור חברות בדירוגי אשראי שונים על פני זמן (באחוזים):

	Time (years)						
	1	2	3	4	5	7	10
Aaa	0.000	0.013	0.013	0.037	0.104	0.244	0.494
Aa	0.021	0.059	0.103	0.184	0.273	0.443	0.619
A	0.055	0.177	0.362	0.549	0.756	1.239	2.136
Baa	0.181	0.510	0.933	1.427	1.953	3.031	4.904
Ba	1.157	3.191	5.596	8.146	10.453	14.440	20.101
B	4.465	10.432	16.344	21.510	26.173	34.721	44.573
Caa	18.163	30.204	39.709	47.317	53.768	61.181	72.384

הסתברות שולית (Marginal Probability)

- מהטבלה עולה כי לחברה בדירוג אשראי התחלתי של Baa יש סיכוי של 0.181% להגיע לחדלות פירעון בסוף השנה הראשונה, 0.510% סיכוי להגיע לחדלות פירעון בסוף השנה השנייה וכך הלאה.
- עוד עולה מהטבלה כי לחברה בדירוג אשראי התחלתי של Baa יש הסתברות של 99.819% ($100\% - 0.181\% =$) לשרוד עד סוף השנה הראשונה, הסתברות של 99.49% ($100\% - 0.510\% =$) לשרוד עד סוף השנה השנייה וכך הלאה.
- אם כך ההסתברות כי חברה בדירוג אשראי התחלתי של Baa תגיע לחדלות פירעון במהלך השנה השנייה (ולא בסופה) היא 0.329% ($0.510\% - 0.181\% =$).

הסתברות משותפת (Joint Probability)

- ההסתברות המשותפת של שני מאורעות היא ההסתברות לקרות אותם שתי מאורעות ביחד.

$$P(AB) = P(A \cap B)$$

מאורעות זרים (Mutually Exclusive Events)

- מאורעות זרים הם מאורעות שאינם יכולים להתרחש בו זמנית, למשל מאורעות משלימים זה לזה (או שהגעת לחדלות פירעון בתאריך מסויים או שלא הגעת לחדלות פירעון באותו מועד - אי אפשר גם וגם).
- כלומר, אם A ו- B הם מאורעות זרים, אזי החיתוך שלהם שווה לאפס (כי אין ביניהם חפיפה):
$$P(A \cap B) = 0$$
- אך יש לשים לב שזה שאין להם חיתוך (חפיפה) לא אומר שהם בלתי תלויים זה בזה - כי תלות מייצגת מידע ולא מתאם אמפירי או קורלציה.
- משמע, אם A ו- B הם מאורעות זרים ואני יודע ש- A קרה, אז אני יודע בוודאות ש- B לא קרה ולכן יש ביניהם תלות מוחלטת.

מאורעות זרים (Mutually Exclusive Events)

- האיחוד של מאורעות באופן כללי מנוסח כדלקמן:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- אך הראנו מקודם כי החיתוך של מאורעות זרים הוא:

$$P(A \cap B) = 0$$

- ולכן האיחוד של מאורעות זרים הוא:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \leq 1$$

תרגיל כיתה 3

• מרחב המדגם בהטלת קוביה: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

• בהטלת קוביה הוגנת, ההסתברות "ליפול" על כל מאורע פשוט שווה ל- $1/6$.

x	1	2	3	4	5	6
$P_X(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

• נניח קוביה "מיוחדת" לא הוגנת שבה מרחב הסתברות הינו כדלקמן:

x	1	2	3	4	5	6
$P_X(x)$	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/2

• נגדיר מאורע A כתוצאה זוגית.

• מהי ההסתברות לקבל תוצאה זוגית בכל אחת מהקוביות?

פתרון תרגיל כיתה 3

• בקוביה ההוגנת: $P(A) = P[\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}] = P(2) + P(4) + P(6)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

• בקוביה המיוחדת: $P(A) = P[\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}] = P(2) + P(4) + P(6)$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$$

• כדי לחשב הסתברות של מאורעות אנו חייבים לדעת מהי ההסתברות של כל אחד מהאיברים.

• למשל, בקוביה הוגנת אנו מניחים שהסתברות של כל האיברים זהה. זה נקרא "מרחב הסתברות אחיד".

• באופן כללי מרחב הסתברות אלמטרי הינו: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$

מאורעות בלתי תלויים (Independent Events)

- מאורעות בלתי תלויים זה בזה הינם מאורעות שהתרחשות של אחד מהם איננה תלויה או מותנית בהתרחשותו של האחר.
- כלומר, אם A ו-B הם מאורעות בלתי תלויים זה בזה, אזי החיתוך שלהם שווה למכפלתם: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- דוגמא למאורעות בלתי תלויים זה בזה:
 1. הטלת שני מטבעות בו זמנית - אין תלות בין התוצאות שנקבל במטבע הראשון לבין התוצאה שנקבל במטבע השני.
 2. הטלת קובייה והטלת מטבע בו זמנית - אין תלות בין התוצאה שנקבל בהטלת הקובייה לבין התוצאה שנקבל בהטלת המטבע.
 3. זריקות לסל/בעיטות לרשת/ירי במטווח/ ניחוש תשובות נכונות במבחן ה-FRM - אין תלות בין אחת לשנייה.

מאורעות בלתי תלויים (Independent Events)

- האיחוד של מאורעות באופן כללי מנוסח כדלקמן:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- אך הראנו מקודם כי החיתוך של מאורעות בלתי תלויים הוא:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- ולכן האיחוד של מאורעות בלתי תלויים הוא:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

הסתברות מותנית (Conditional Probability) ואי תלות

- ההסתברות המותנית לקרות מאורע A בהינתן שמאורע B קרה, מסומנת כ-: $P(A/B)$
- כאשר נוסחת הכפל היא:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$$

- וממנה נגזרת נוסחת ההסתברות המותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \forall P(B) > 0$$

- ונוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(B) = P(B/A) \times P(A) + P(B/\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

תרגיל כיתה 4

- נגדיר: מאורע A מעבר של בחינת ה-FRM ומאורע B הכנה רצינית לקראת הבחינה.

$$P(A) = \frac{8}{15}, \quad P(B) = \frac{11}{15}, \quad P(A \cap B) = \frac{9}{15}$$

- מהי ההסתברות לעבור את בחינת ה-FRM בהינתן שידוע כי בוצעה הכנה רצינית לקראת הבחינה (קרי, קורס ניהול סיכונים פיננסיים של היחידה ללימודי חוץ של אוניברסיטת אריאל)?

פתרון תרגיל כיתה 4

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\cancel{9}/15}{11/\cancel{15}} = \frac{9}{11}$$

תרגיל כיתה 5

- מהי ההסתברות, של חברה בדירוג אשראי התחלתי של Caa (כפי שנגזר ומתגלה מהטבלה הקודמת), להגיע למצב חדלות פירעון במהלך השנה השלישית בהינתן שהיא לא הגיעה לחדלות פירעון לפני כן (קרי, בשנתיים הראשונות)?

	Time (years)						
	1	2	3	4	5	7	10
Aaa	0.000	0.013	0.013	0.037	0.104	0.244	0.494
Aa	0.021	0.059	0.103	0.184	0.273	0.443	0.619
A	0.055	0.177	0.362	0.549	0.756	1.239	2.136
Baa	0.181	0.510	0.933	1.427	1.953	3.031	4.904
Ba	1.157	3.191	5.596	8.146	10.453	14.440	20.101
B	4.465	10.432	16.344	21.510	26.173	34.721	44.573
Caa	18.163	30.204	39.709	47.317	53.768	61.181	72.384

פתרון תרגיל כיתה 5

- נחשב את ההסתברות של חברה בדירוג Caa להגיע לחדלות פירעון במהלך השנה השלישית כפי שנגזר ומתגלה מהטבלה הקודמת:

$$d_3 - d_2 = 39.709\% - 30.204\% = 9.505\%$$

- להסתברות זו נקרא ההסתברות הלא מותנית (השולית) לחדלות פירעון. זוהי למעשה ההסתברות להגיע לחדלות פירעון במהלך השנה השלישית (ולא בסופה) כפי שנראה בזמן 0.
- ההסתברות שהחברה תשרוד עד לסוף השנה השנייה היא:

$$S_2 = 100\% - 30.204\% = 69.796\%$$

פתרון תרגיל כיתה 5

- ההסתברות שהחברה תגיע לחדלות פירעון במהלך השנה השלישית, מותנה בכך כי היא לא הגיעה לחדלות פירעון מוקדם יותר הינה:

$$\frac{9.505\%}{69.769\%} = 13.623\%$$

תרגיל כיתה 6

- ניקח חברה בדירוג אשראי התחלתי של Baa עם הסתברויות שוליות לחדלות פירעון כפי שנגזר ומתגלה מהטבלה הקודמת.

1. מהי ההסתברות המותנית שלה לחדלות פירעון בשנה הראשונה?
2. מהי ההסתברות המותנית שלה לשרידות בשנה הראשונה?
3. מהי ההסתברות המותנית שלה לחדלות פירעון בשנה השנייה?
4. מהי ההסתברות המותנית שלה לשרידות בשנה השנייה?
5. מהי ההסתברות המצטברת שלה לחדלות פירעון בשנתיים הראשונות?

פתרון תרגיל כיתה 6

- ניקח חברה בדירוג אשראי התחלתי של Baa עם הסתברויות שוליות לחדלות פירעון כפי שנגזר ומתגלה מהטבלה הקודמת:

$$d_1 = 0.181\% , d_2 = 0.510\%$$

- ההסתברות השולית לחדלות פירעון (d) בסוף השנה הראשונה שווה להסתברות המותנית לחדלות פירעון (k) בסוף השנה הראשונה:

$$k_1 = d_1 = 0.181\%$$

- ההסתברות השולית לשרידות (S) בסוף השנה הראשונה שווה להסתברות המותנית לשרידות (f) בסוף השנה הראשונה:

$$S_1 = 1 - d_1 = (100\% - 0.181\%) = 99.819\% = f_1 = 1 - k_1$$

פתרון תרגיל כיתה 6

- ההסתברות המותנית לחדלות פירעון בסוף השנה השנייה (מותנית בכך שהחברה לא הגיעה לחדלות פירעון בסוף השנה הראשונה) היא:

$$k_2 = S_1 \times d_2 = 99.819\% \times 0.510\% = 0.509\%$$

- ההסתברות השולית לשרידות בסוף השנה השנייה היא:

$$S_2 = 1 - d_2 = 100\% - 0.510\% = 99.490\%$$

- ההסתברות המותנית לשרידות בסוף השנה השנייה היא:

$$\begin{aligned} f_2 &= (1 - k_1) \times (1 - k_2) \\ &= (100\% - 0.181\%) \times (100\% - 0.510\%) = 99.310\% \end{aligned}$$

פתרון תרגיל כיתה 6

- לפיכך, ההסתברות המצטברת לחדלות פירעון בשנים 1 ו- 2 מחושבת כדלקמן:

$$C_2 = k_1 + k_2 = 0.181\% + 0.509\% = 0.690\%$$

- או לחילופין:

$$C_2 = 1 - f_2 = 1 - 99.310\% = 0.690\%$$

הסתברות מצטברת לחדלות לשרידות	הסתברות מצטברת לחדלות פירעון	זמן (שנים)	הסתברות מותנית לחדלות פירעון	הסתברות מותנית לשרידות	זמן (שנים)	הסתברות שולית לחדלות פירעון	הסתברות שולית לשרידות	זמן (שנים)
99.819%	0.181%	1	0.181%	99.819%	1	0.181%	99.819%	1
99.310%	0.690%	2	0.509%	99.310%	2	0.510%	99.490%	2
98.383%	1.617%	3	0.927%	98.383%	3	0.933%	99.067%	3
96.979%	3.021%	4	1.404%	96.979%	4	1.427%	98.573%	4
95.085%	4.915%	5	1.894%	95.085%	5	1.953%	98.047%	5

הסתברות מותנית ממוצעת (Average Intensity)

- הסתברויות מותנות (Conditional) לחדלות פירעון נקראות גם עוצמות חדלות פירעון (Default Intensities) או שיעורי סכנה (Hazard Rate).

- בהינתן כי ההסתברות המצטברת (Cumulative) לחדלות פירעון עד סוף שנה 7 היא 0.756%, אזי ההסתברות המותנית הממוצעת לחדלות פירעון עד סוף שנה 7 תחושב כדלקמן:

$$\bar{k}_7 = -\frac{1}{7} \times \ln[1 - C_7] = -\frac{1}{7} \times \ln[1 - 0.756\%] = 0.108\%$$

$$C_7 = 1 - e^{[-\bar{k}_7 \times 7]} = 1 - e^{[-0.108\% \times 7]} = 0.756\%$$

- ולהיפך:

נוסחת ההסתברות השלמה (Law of Total Probability)

- בכיתה שבה מתבצעת בחינת ה-FRM: 40% גברים ו-60% נשים, 20% כלכלנים ו-50% כלכלניות.
- בוחרים באקראי נבחן/ת מהכיתה, מהי ההסתברות שהוא/היא כלכלן/ית?

$$20\% \times 40\% + 50\% \times 60\% = 38\%$$

- אם נבחן/ת הוא/היא כלכלן/ית מהי ההסתברות שזו אישה? מהי ההסתברות שזה גבר?

$$P(\text{אישה}) = \frac{50\% \times 60\%}{38\%} = \frac{30\%}{38\%} = 0.79$$

$$P(\text{גבר}) = \frac{20\% \times 40\%}{38\%} = \frac{8\%}{38\%} = 0.21$$

נוסחת ההסתברות השלמה (Law of Total Probability)

• יהיו $B_1, \dots, B_n \subset \Omega$ חלוקה (זרים בזוגות)

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

• ויהי A מאורע, אזי

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i) \times P(B_i)$$

נוסחת ההסתברות השלמה (Law of Total Probability)

- להסתברויות $P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(B_n)$ אנו קוראים הסתברויות אפריוריות (לפני אינפורמציה)
- להסתברויות $P(B_1/A)$, $P(B_2/A)$, $P(B_n/A)$ אנו קוראים הסתברויות פוסטריוריות (אחרי אינפורמציה)

$$P(B_1/A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$$

- נוסחת הכפל:
$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1) \times P(B_1)}{\sum_{i=1}^n P(A/B_i) \times P(B_i)}$$
- נוסחת ההסתברות השלמה:

נוסחת ההסתברות השלמה (Law of Total Probability)

- במפעל 3 מכונות לייצור לחם.

סה"כ	B_1	B_2	B_3	
100%	50%	30%	20%	מייצרת
16%	1%	5%	10%	שורפת

- מהי ההסתברות לקבל לחם שרוף?

$$1\% \times 50\% + 5\% \times 30\% + 10\% \times 20\% = 0.5\% + 1.5\% + 2\% = 4\%$$

$$P(B_1) = 50\% \quad P(A/B_1) = 1\% \quad P(A/B_1) \times P(B_1) = 0.5\% \quad P(B_2) = 30\%$$

$$P(A/B_2) = 5\% \quad P(A/B_2) \times P(B_2) = 1.5\% \quad P(B_3) = 20\% \quad P(A/B_3) = 10\%$$

$$P(A/B_3) \times P(B_3) = 2\% \quad P(A) = \sum_{i=1}^3 P(A/B_i) \times P(B_i) = 4\%$$

נוסחת ההסתברות השלמה (Law of Total Probability)

- משמע, אם קיבלנו לחם שרוף אזי ישנו סיכוי של:
 1. 50% שהלחם יוצר במכונה B_3 ($2\%/4\% = 50\%$)
 2. 37.5% שהלחם יוצר במכונה B_2 ($1.5\%/4\% = 37.5\%$)
 3. 12.5% שהלחם יוצר במכונה B_1 ($0.5\%/4\% = 12.5\%$).
- אפריורית (לפני אינפורמציה), הסיכוי להוציא לחם ממכונה B_3 הוא 20% (נתון).
- פוסטריורית (לאחר אינפורמציה מסוימת, למשל שידוע כי הלחם שקיבלנו הוא שרוף), הסיכוי להוציא לחם ממכונה B_3 הוא 50% ($2\%/4\% = 50\%$).

תרגיל כיתה 7

- בכיתה שבה מתבצעת בחינת ה-FRM, אפרירית:
70% כלכלנים (מתוכם 20% מובטלים), 20% סטטיסטיקאים
(מתוכם 25% מובטלים), 10% פיזיקאים (מתוכם 60% מובטלים).
- 1. מהי ההסתברות האפרירית לבחור באקראי נבחן מובטל?
- 2. מהן ההסתברויות הפוסטריריות לבחור באקראי נבחן מובטל בהינתן האינפורמציה שהנבחן שבחרנו הוא כלכלן/סטטיסטיקאי/פיזיקאי?

פתרון תרגיל כיתה 7

1. נבחר באקראי נבחן/ת מובטל:

$$\begin{aligned} P(\text{מובטל}) &= 70\% \times 20\% + 20\% \times 25\% + 10\% \times 60\% \\ &= 14\% + 5\% + 6\% = 25\% \end{aligned}$$

2. ההסתברויות פוסטריות לאינפורמציה שהנבחן הוא מובטל:

$$P(\text{כלכלן} / \text{מובטל}) = \frac{14}{25} = 56\%$$

$$P(\text{סטטיסטיקאי} / \text{מובטל}) = \frac{5}{25} = 20\%$$

$$P(\text{אחר} / \text{מובטל}) = \frac{6}{25} = 24\%$$

Bayes תהויה

$$P(B_k / A) = \frac{P(A / B_k) \times P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A / B_i) \times P(B_i)} ; \forall k = 1, 2, \dots, n$$

נוסחת Bayes

- נוסחת Bayes משמשת לעדכון סט של הסתברויות אפריוריות, עבור מאורע נתון, בתגובה להגעה של מידע חדש ובעצם כך להופכן להסתברויות פוסטריוריות.
- לדוגמא, אם אנו רוצים למצוא מהי ההסתברות לצמיחה כלכלית במשק בהינתן שמדד ת"א 100 (כאינדיקטור מוביל) יעלה, אזי נשתמש במשוואה הבאה:

$$P(G/U) = \frac{P(U/G)}{P(U/G) \times P(G) + P(U/R) \times P(R)} \times P(G) \quad \bullet \text{ כאשר:}$$

- $P(G)$ = ההסתברות לצמיחה כלכלית.
- $P(R)$ = ההסתברות המשלימה לצמיחה כלכלית, קרי, לשפל.
- $P(U)$ = ההסתברות שמדד ת"א 100 יעלה.

תרגיל כיתה 8

- באוכלוסיית מנהלי סיכונים מסויימת המונה 350 CROים:
 1. 200 מנהלים רק סיכונים תפעוליים ומתוכם רק 50 אכן יודעים מה הם עושים.
 2. 150 מנהלים רק סיכוני אשראי ומתוכם רק 60 אכן יודעים מה הם עושים.
- א. פגשנו CRO באקראי, מהי ההסתברות שה- CRO גם מנהל סיכונים תפעוליים וגם יודע מה הוא עושה?
- ב. פגשנו CRO באקראי, מהי ההסתברות שה- CRO מנהל סיכונים תפעוליים, אם ידוע שהוא יודע מה הוא עושה?
- ג. פגשנו CRO באקראי, מהי ההסתברות שה- CRO יודע מה הוא עושה, אם ידוע שהוא מנהל סיכונים תפעוליים?

פתרון תרגיל כיתה 8

א. נגדיר: A = מנהל סיכונים תפעוליים ו- $\bar{A}$ = מנהל סיכוני שוק.
 B = יודע מה הוא עושה ו- $\bar{B}$ = אין לו מושג מה הוא עושב.

$$P(A) = \frac{200}{200 + 150} = 0.57 \quad P(\bar{A}) = 1 - 0.57 = 0.43 = \frac{150}{350}$$

$$P(B) = \frac{60 + 50}{350} = 0.31 \quad P(\bar{B}) = 1 - 0.31 = 0.69 = \frac{240}{350}$$

$$P(B/A) = \frac{50}{200} = 0.25 \quad P(\bar{B}/A) = \frac{150}{200} = 0.75$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{60}{150} = 0.4 \quad P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{90}{150} = 0.6$$

$$P(BA) = P(B \cap A) = P(B/A) \times P(A) = 0.57 \times 0.25 = 0.14$$

תרגיל כיתה 9

- 20% מהחברות הציבוריות במדינה מסויימת הינם Pre-default על סמך דירוגם הפומבי.
- בהינתן שחברה ציבורית מסויימת הינה Pre-default הרי ההסתברות שתוצאות מודלים סטטיסטיים לאמידת דירוג אשראי ו/או הסתברות לחדלות פירעון (כגון: Altman, Chesser, Merton, KMV וכו') יצביעו על דירוג חוב נמוך (CCC) היא 99%. כמו כן, גם עבור 2% מהחברות הציבוריות שהינן בעלות איכות אשראי (Credit Worthiness) **גבוהה**, תוצאות המודלים לדירוג סינטטי (Synthetic Credit Rating) מצביעות על דירוג חוב נמוך.
- מהי אם כן ההסתברות שחברה ציבורית מסויימת הינה Pre-default בהינתן שתוצאות המודלים הסטטיסטיים מצביעות על דירוג חוב נמוך?

פתרון תרגיל כיתה 9

- נגדיר: A = חברה Pre-default, $\bar{A}$ = חברה עם איכות אשראי גבוהה, B = תוצאות המודלים הסטטיסטיים מצביעות על דירוג חוב נמוך ו- $\bar{B}$ = תוצאות המודלים הסטטיסטיים מצביעות על דירוג חוב לא נמוך.

$$P(A) = 0.2, \quad P(B/A) = 0.99, \quad P(B/\bar{A}) = 0.02, \quad P(A/B) = ?$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(B/A) \times P(A)$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \Rightarrow P(B) = P(B/A) \times P(A) + P(B/\bar{A}) \times P(\bar{A})$$

$$P(B) = 0.99 \times 0.2 + 0.02 \times 0.8 = 0.21$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B/A) \times P(A)}{P(B)} = \frac{0.99 \times 0.2}{0.21} = 0.93$$

מאורעות בלתי תלויים (Independent Events)

- אינטואיטיבית, נאמר כי A ו-B הינם מאורעות בלתי תלויים, אם

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A/B) = P(A/\bar{B}) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- נטיל קוביה הוגנת (1,2,3,4,5) ומטבע הוגן (H,T), מהי ההסתברות לקבל "1" ו-"עץ"?

- היות ומדובר במאורעות בלתי תלויים, אז:

$$P(H,1) = P(H) \times P(1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

הערות

1. אין לבלבל בין מאורעות בלתי תלויים לבין מאורעות זרים. במאורעות זרים, אם אחד מהם קרה, אז השני בטוח לא קרה, ולכן יש ביניהם תלות מוחלטת. לאמור- מאורעות זרים הם בהכרח תלויים זה בזה. אם A ו- B זרים וגם $P(A), P(B) > 0$ אזי:

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B)$$

2. Ω ו- ϕ תמיד בלתי תלויים במאורעות אחרים. אם A מוכל ב- Ω , אזי A ו- Ω בלתי תלויים זה בזה.

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A) \times P(\Omega) = P(A) \times 1 = P(A)$$

הערות

3. אם A ו- B מאורעות בלתי תלויים, אזי: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B})$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

היות והם מאורעות בלתי תלויים

$$\begin{aligned} &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = 1 - P(A) - P(B) + [1 - P(A)] \times P(B) \\ &= [1 - P(A)] \times [1 - P(B)] = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \end{aligned}$$

4. אי תלות של n מאורעות צריך לקיים גם

$$P_{i=1}^n A_i = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

הערות

5. אי תלות של 3 מאורעות

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

כלומר, אי תלות בזוגות לא בהכרח אומרת שאין תלות בשלשה.

תרגיל כיתה 10

- מטילים 2 קוביות אחת ירוקה ואחת אדומה.
 - $P(A)$ = הקובייה האדומה נופלת על 1 או 2.
 - $P(B)$ = הקובייה הירוקה נופלת על 3 או 5.
 - $P(C)$ = סכום התוצאות הוא 4, 11 או 12.
 - בכל מאורע הספרה השמאלית היא של הקוביה האדומה והספרה הימנית היא של הקוביה הירוקה.
1. האם המאורעות A, B ו-C אינם תלויים בזוגות?
 2. האם המאורעות A, B ו-C אינם תלויים יחד (בשלשה)?

פתרון תרגיל כיתה 10

$$A = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$B = \{(1,3), (2,3), \dots, (6,3), (1,5), (2,5), \dots, (6,5)\} \Rightarrow P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$C = \{(1,3), (2,2), (3,1), (5,6), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5)\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cap C) = \{(1,3), (2,2)\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(B \cap C) = \{(1,3), (6,5)\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \{(1,3)\} = \frac{1}{36}$$

פתרון תרגיל כיתה 10

$$P(A \cap B) = \frac{1}{9} \equiv \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = P(A) \times P(B) \quad .1$$

• קיבלנו כי A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים.

$$P(A \cap C) = \frac{1}{18} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = P(A) \times P(C)$$

• קיבלנו כי A ו- C הם מאורעות בלתי תלויים.

$$P(B \cap C) = \frac{1}{18} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = P(B) \times P(C)$$

• קיבלנו כי B ו- C הם מאורעות בלתי תלויים.

• לפיכך, כל המאורעות הם בלתי תלויים בזוגות.

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = P(A) \times P(B) \times P(C) \quad .2$$

• כל המאורעות תלויים בשלשה (הסיבה היא ש- C היא פונקציה

הפסקה (5-10 דקות)

מבנה ההרצאה

- אלגברה של מאורעות
- הפסקה (5-10 דקות)
- הסתברויות
- הפסקה (5-10 דקות)
- **משתנים מקריים**
- הפסקה (5-10 דקות)
- התפלגויות בדידות
- הביתה

3. משתנים מקריים (Random Variables)

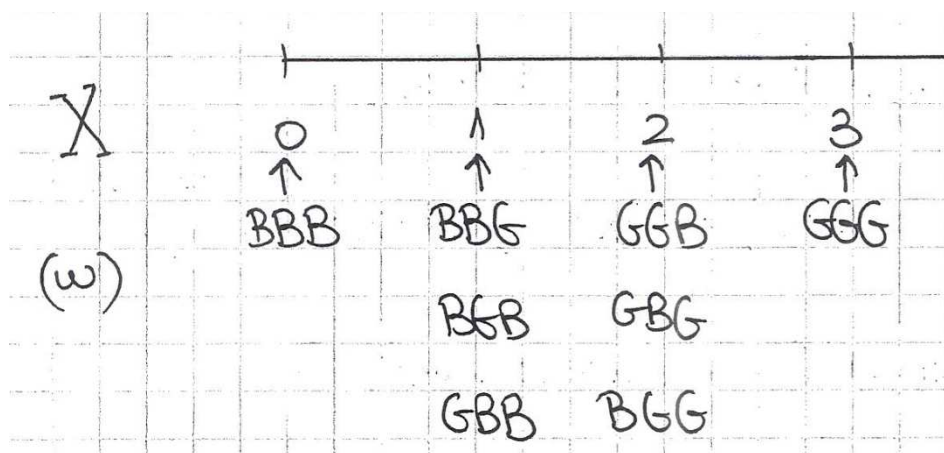


משתנה מקרי חד מימדי (Univariate Random Variable)

- ניסוי 1: תכנון משפחה בת 3 ילדים ($B = \text{בן}$, $G = \text{בת}$)
 $\Omega = \{BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG\}$
- נגדיר X מספר הבנות במשפחה.
- מהי ההסתברות ל-2 בנות במשפחה $(X=2)$?
$$P(A) = 3/8$$
- מהי ההסתברות לכל הפחות ל-2 בנות במשפחה $(X \geq 2)$?
$$P(C) = 4/8$$
- מהי ההסתברות לכל היותר לבת אחת במשפחה $(X \leq 1)$?
$$P(D) = 4/8$$
- למעשה קיבלנו כאן פונקציה המגדירה לכל איבר בתחום – ערך אחד בטווח.

משתנה מקרי חד מימדי (Univariate Random Variable)

- אנו רגילים ממתמטיקה ל- $F(x) = y$, אך בהערכת/ניתוח סיכונים (בלועזית: אקטואריה) אנו משתמשים ב-מספר ממש $X(\omega)$.
- למשל אם $X =$ מספר הבנות במשפחה, אזי X יכול לקבל ערך $X(GBB) = 1$.
- נבצע העתקה ממרחב המדגם לישר הממשי, כלומר, משתנה מקרי המתאים מספר ממשי לכל תוצאה של הניסוי:



x	0	1	2	3
$P_X(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

משתנה מקרי חד מימדי (Univariate Random Variable)

- נגדיר n כמספר הניסיונות (trails) ו- P כהסתברות להצלחה בודדת.
 - ניסוי 2: הטלת קוביה הוגנת 4 פעמים וספירת הפעמים שקיבלנו "6".
 $n = 4, P = 1/6$
 - ניסוי 3: מילוי טופס התשובות בבחינת FRM הראשונה וספירת מספר הניחושים הנכונים:
 $n = 100, P = 1/4$
 - ניסוי 4: הטלת מטבע הוגן עד לקבלת עץ בפעם הראשונה:
אינסוף מאורעות
 $n = \infty, P = 1/2$
- $$\Omega = \{H, HT, TTH, TTTH, \dots\}$$

משתנה מקרי חד מימדי (Univariate Random Variable)

- פונקציה $X(\omega)$ המתאימה לכל נקודה (ω) במרחב המדגם Ω מספר ממשי $X(\omega)$.
- משתנה מקרי חד מימדי בדיד (discrete): מקבל סדרה של ערכים סופית או בת מניה (קרי, ניתנת לספירה באמצעות האצבעות).
- משתנה מקרי חד מימדי רציף (continuous): מקבל רצף של ערכים אינסופי הניתן למדידה (למשל, זמן, טמפרטורה, גובה, משקל וכיוב').
- כל ערך של משתנה מקרי, מהווה מאורע:
$$P(X \leq 1) = P(X = 0 \cup X = 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

פונקציית ההסתברות (Probability Function)

- פונקציית ההסתברות של משתנה מקרי חד מימדי בדיד X (קרי, המשתנה המקרי), לכל x (קרי, ערך מסוים) ממשי:

$$P_X(x) = P(X = x)$$

- תכונות

$$0 \leq P_X(x) \leq 1 \quad .1$$

$$\sum_x P_X(x) = 1 \quad .2$$

$$.3 \quad \text{דיאגרמת מקלות.}$$

- פונקציית ההסתברות (mass או pf- probability function) מגדירה את ההסתברות שמשתנה מקרי, X , יהיה שווה לערך מסוים, x .

המקדם הבינומי (Binomial Coefficient)

- מספר הקבוצות החלקיות מגודל r שניתן לבחור מתוך n איברים כאשר אין חשיבות לסדר ההופעה של האיברים בקבוצה ללא החזרה.

- כלומר, המקדם הבינומי הינו מס' המדגמים הלא סדורים ללא החזרה.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- מספר השלשות שניתן ליצור מ-4 אנשים:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

- מספר הזוגות שניתן ליצור מ-5 אנשים:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

- זהותית $0! \equiv 1$

פונקציית הסתברות (Probability Function)

- תיק ביטוח חיים מסויים מורכב מ- 8 פוליסות ביטוח לתקופה של 10 שנים.
- 3 פוליסות של גברים ו- 5 פוליסות של נשים.
- נלקח מדגם של 4 פוליסות.
- 1. הצג את פונקציית ההסתברות (pf).
- 2. מהי ההסתברות שנבחרו לכל היותר 2 פוליסות של נשים?
- 3. מהי ההסתברות שנבחרו לכל הפחות 3 פוליסות של נשים?
- 4. הצג את פונקציית ההתפלגות המצטברת (cdf).
- נגדיר $X =$ מספר הפוליסות של הנשים במדגם:

$$X = \{(1,3), (2,2), (3,1), (4,0)\}$$

פונקציית הסתברות (Probability Function)

• מספר המאורעות הפשוטים במרחב המדגם: $n(\Omega) = \binom{8}{4} = 70$

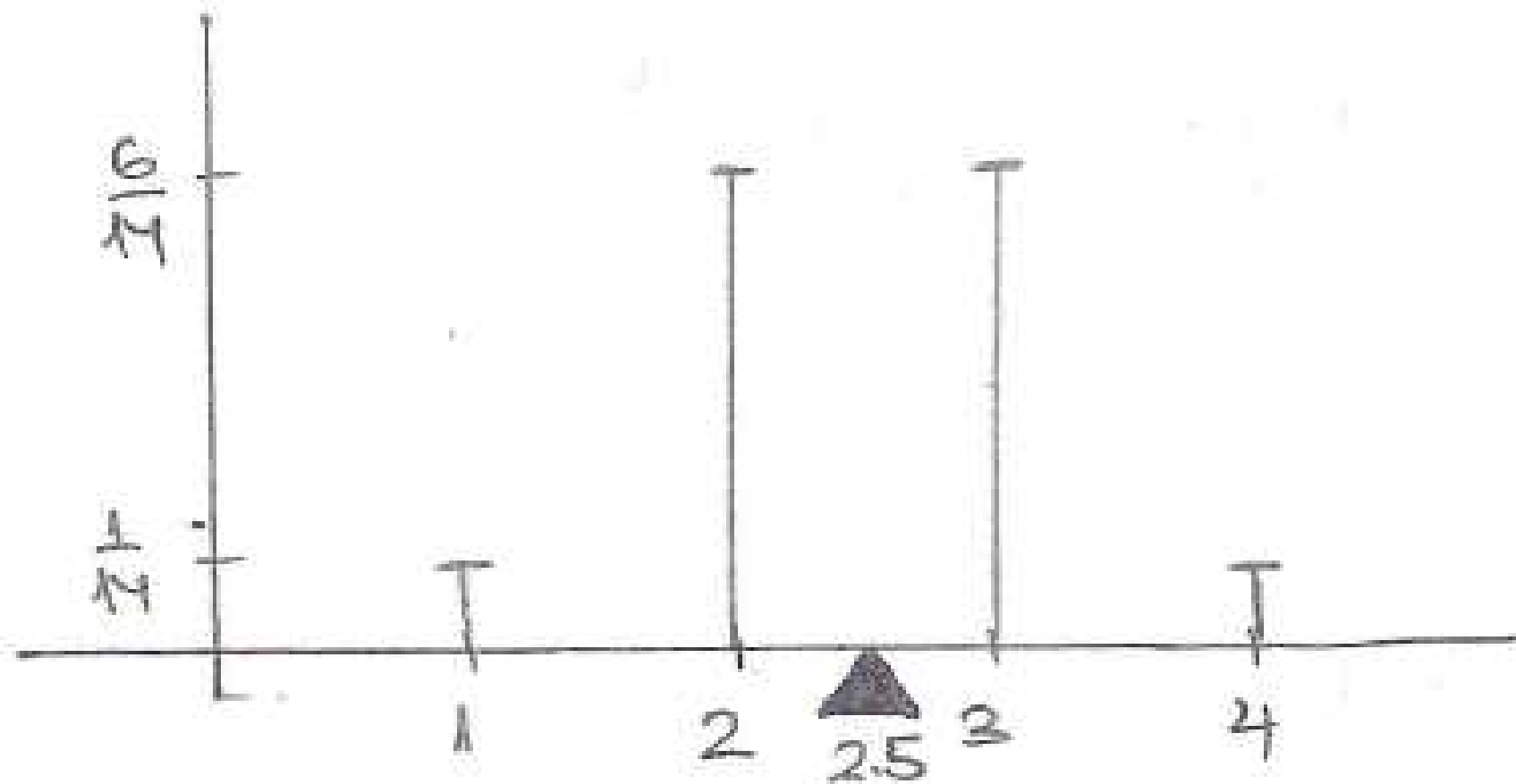
$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{4}}{\binom{8}{4}} = \phi \quad P(X = 1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{3}}{\binom{8}{4}} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{30}{70} = \frac{6}{14} \quad P(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{30}{70} = \frac{6}{14}$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{5}{4}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$$

פונקציית הסתברות (Probability Function)

- נציג את פונקציית ההסתברות (pf) המתאימה:



פונקציית הסתברות (Probability Function)

- נציג את פונקציית ההסתברות (pf) המתאימה:

x	1	2	3	4
$P_X(x)$	1/14	6/14	6/14	1/14

- מהי ההסתברות שנבחרו לכל היותר 2 פוליסות של נשים?

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$$

- מהי ההסתברות שנבחרו לכל הפחות 3 פוליסות של נשים?

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת (Cumulative Distribution Function)

- פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי חד מימדי בדיד X , לכל x ממשי:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

- תכונות:

1. במינוס אינסוף $(-\infty)$ הפונקציה שואפת ל-0.
2. בפלוס אינסוף $(+\infty)$ הפונקציה שואפת ל-1.
3. פונקציה מונטונית לא יורדת. לאמור- אם: $F_X(a) \leq F_X(b)$ אזי: $P(x \leq a) \leq P(x \leq b)$
4. פונקציית מדרגות.

פונקציית ההתפלגות המצטברת (Cumulative Distribution Function)

- פונקציית ההתפלגות המצטברת (cdf- cumulative distribution function) מגדירה את ההסתברות שמשתנה מקרי, X , יקבל ערך אשר קטן או שווה לערך מסוים, x .
- טענה: ניתן לקבל מפונקציית ההסתברות (pf) את פונקציית ההתפלגות המצטברת (cdf), ולהיפך.
- הטענה נכונה, על פי ההגדרה:

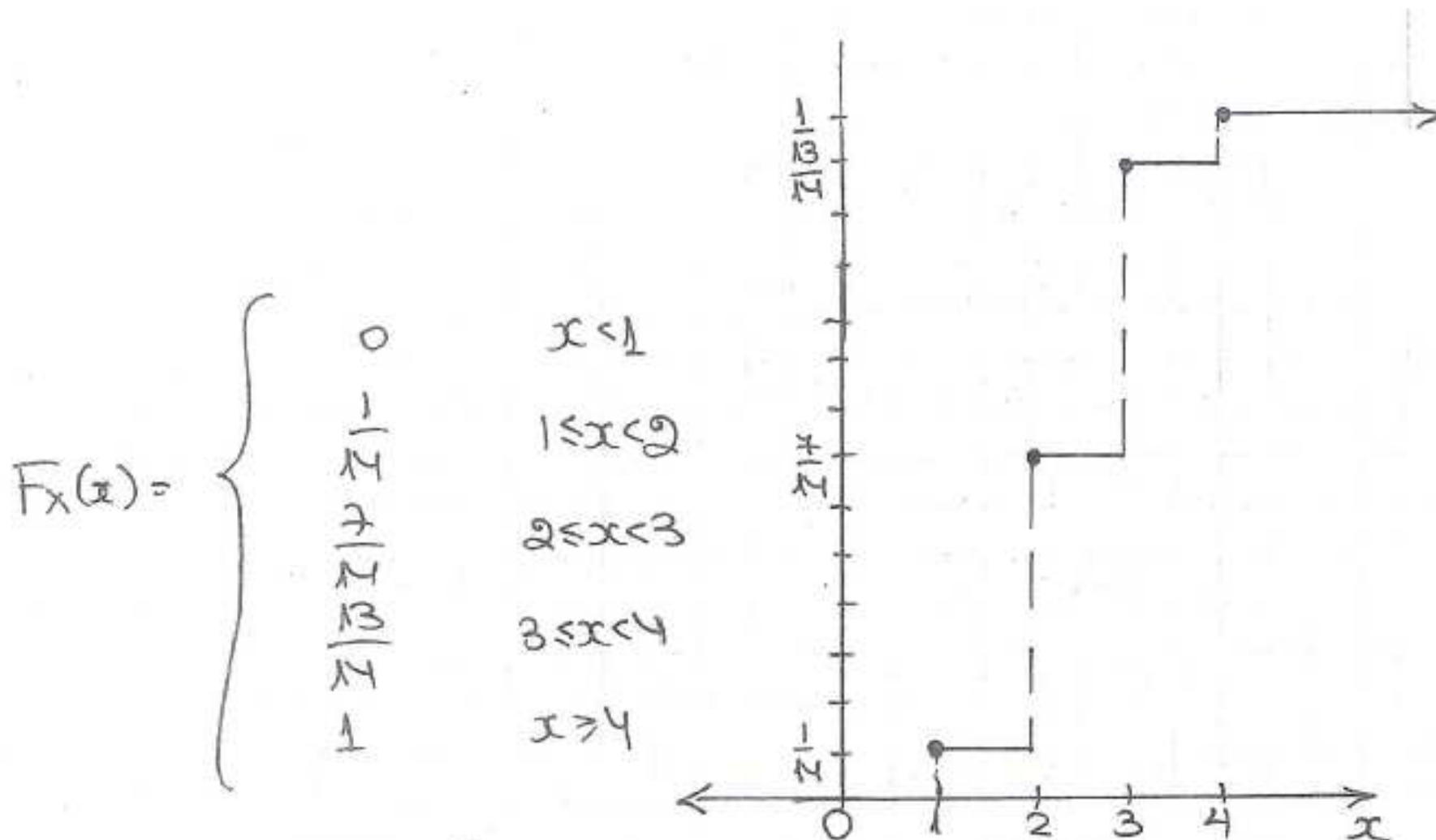
$$F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{x \leq t} P_X(x)$$

- ההיפך גם נכון:

$$P_X(x) = F_X(x) - \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_X(x - \varepsilon) \right] = F_X(x) - F_X(x^-)$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת (Cumulative Distribution Function)

- נציג את פונקציית ההתפלגות המצטברת (cdf) המתאימה:



מדדי נטיה מרכזית (Measures of Central Tendency)

- ממוצע אריתמטי/חשבוני (arithmetic average): סכום כל ערכי התצפיות (observations) במדגם/אוכלוסיה, מחולק ב- # (מספר) התצפיות.
- ממוצע גיאומטרי/הנדסי (geometric average): משמש לחישוב תשואות השקעה על פני מספר תקופות או למדידת שיעורי צמיחה מורכבים (CAGR- Compound Annual Growth Rate).
- החישוב עבור תוחלת שכיח (mode): הערך שמתרחש בתדירות/שכיחות הגבוהה ביותר בקבוצת נתונים.
- חציון (median): נקודת האמצע (midpoint) של קבוצת נתונים כאשר הנתונים מסודרים בסדר עולה (ascending) או יורד (descending).

התוחלת של מ"מ חד מימדי בדיד X

- התוחלת (Expected Value) הינה מרכז הכובד של ההתפלגות או הממוצע המשוקלל (weighted average) של התוצאות האפשריות של משתנה מקרי, כאשר המשקלות הם ההסתברויות שהתוצאות אכן יתרחשו.

מספר נבחנים	ציון
2	80
3	90
4	75
<u>1</u>	100
10	

$$E(X) = 80 \times \frac{2}{10} + 90 \times \frac{3}{10} + 75 \times \frac{4}{10} + 100 \times \frac{1}{10} = 83$$

התוחלת של מ"מ חד מימדי בדיד X

- התוחלת מסומנת ב- $E(X)$ ומוגדרת ע"י: $E(X) = \sum_x x \cdot P_X(x)$
- נתון מ"מ X ותהי $g(X)$ פונקציה של X.

$$E(X) = 0 \leftarrow x = X$$

x	-1	0	1
$P_X(x)$	1/3	1/3	1/3

$$E(Y) = \frac{2}{3} \leftarrow y = X^2$$

x^2	-1	0	1
$P_X(x)$	0	1/3	2/3

$$P(y = -1) = P(X^2 = -1) = 0$$

$$P(y = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(y = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(X) P_X(x) \Rightarrow E(X^2) = \sum_{x=1} x^2 P_X(x) = -1^2 \times \frac{1}{3} + 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

תכונות התוחלת

- קבוע (constant) הוא מ"מ שמקבל ערך יחיד בהסתברות 1.

$$E(a) = a$$

$$E(aX) = aE(X)$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$E(aX + b) = \sum_x (ax + b)P_X(x) = \sum_x ax \cdot P_X(x) + \sum_x b \cdot P_X(x)$$

$$= a \sum_x x \cdot P_X(x) + \sum_x b \cdot P_X(x) = aE(x) + b$$

אחרת	a	x
1/2	1/2	$P_X(x)$

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = E \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y) \Rightarrow Y \text{ ו- } X \text{ לכל}$$

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \Rightarrow Y \text{ ו- } X \text{ אם ורק אם הם בלתי תלויים}$$

השונות של מ"מ חד מימדי בדיד X

- השונות (Variance) מספקת מדד למידת הפיזור (dispersion) של ערכי המשתנה המקרי סביב התוחלת (mean).
- נניח מ"מ X בעל תוחלת סופית $\mu = E(X)$

x	$x - \mu$	$P_X(x)$	$(x - \mu)^2$
0	-3/4	2/4	9/16
1	1/4	1/4	1/16
2	5/4	1/4	25/16

- הממוצע המשוקלל של הסטיות מהתוחלת שווה אפס

$$E(X - \mu) = 0$$

השונות של מ"מ חד מימדי בדיד X

- מה שמעניין אותנו זה המרחקים/הסטיות מהתוחלת ועל כן ניתן לעבוד עם ערך מוחלט (absolute value), אבל קשה לעבוד עם ערך מוחלט ולכן אנחנו עובדים עם ריבועי המרחקים/הסטיות.

$$V(X) = \frac{9}{16} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{25}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{44}{64}$$

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 P_X(x)$$

סטיית התקן של מ"מ חד מימדי בדיד X

- סטיית התקן (standard deviation) הינה השורש הריבועי (החיובי) של השונות.

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$$

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - E(2\mu X) + E(\mu^2)$$

$$E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 =$$

$$E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E^2(X)$$

תכונות השונות

$$V(X) = \sum_x (x - \mu)^2 P_X(x) \geq 0$$

$$V(a) = 0$$

$$V(aX) = E[(aX - a\mu)^2] = E[a^2(X - \mu)^2] = a^2 \cdot E[(X - \mu)^2] = a^2 \cdot V(X)$$

$$V(aX + b) = E[((aX + b) - (a\mu + b))^2] = E[a^2(X - \mu)^2] = a^2 \cdot V(X)$$

אם $X_1, X_2, \dots, X_n$ הם בלתי תלויים אז :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n) = V \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \Rightarrow \text{אם } X \text{ ו-} Y \text{ הם בלתי תלויים}$$

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2COV(X, Y) \Rightarrow \text{אם } X \text{ ו-} Y \text{ הם תלויים}$$

$$V(aX \pm bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) \Rightarrow \text{אם } X \text{ ו-} Y \text{ הם בלתי תלויים}$$

$$V(aX \pm bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) \pm 2abCOV(X, Y) \Rightarrow \text{אם } X \text{ ו-} Y \text{ הם תלויים}$$

תרגיל כיתה 11

- X משתנה מקרי בעל תוחלת של 12 ושונות של 16.
- חשב את התוחלת, השונות וסטיית התקן של y בכל אחד מהמקרים הבאים:

$$1. \quad y = -X - 5$$

$$2. \quad y = 10X$$

$$3. \quad y = 5X + 3$$

פתרון תרגיל כיתה 11

$$E(X)=12, \quad V(X)=16 \quad .1$$

$$E(y) = E(-X - 5) = -E(X) - 5 = -12 - 5 = -17$$

$$V(y) = V(-X - 5) = (-1)^2 V(X) = V(X) = 16, \quad \sigma_y = \sqrt{V(y)} = \sqrt{16} = 4$$

.2

$$E(y) = E(10X) = 10E(X) = 10 \cdot 12 = 120$$

$$V(y) = V(10X) = 10^2 V(X) = 100 \cdot 16 = 1,600, \quad \sigma_y = \sqrt{V(y)} = \sqrt{1,600} = 40$$

.3

$$E(y) = E(5X + 3) = 5E(X) + 3 = 5 \cdot 12 + 3 = 63$$

$$V(y) = V(5X + 3) = 5^2 V(X) = 25 \cdot 16 = 400, \quad \sigma_y = \sqrt{V(y)} = \sqrt{400} = 20$$

הפסקה (5-10 דקות)

מבנה ההרצאה

- אלגברה של מאורעות
- הפסקה (5-10 דקות)
- הסתברויות
- הפסקה (5-10 דקות)
- משתנים מקריים
- הפסקה (5-10 דקות)
- התפלגויות בדידות
- הביתה

4. התפלגויות בדידות

(Discrete Distributions)



התפלגויות (Distributions)

- הצגנו מוקדם יותר ארבעה ניסויים:

1. תכנון משפחה בת 3 נפשות, כאשר X שווה למספר הבנות במשפחה.

2. הטלת קוביה 4 פעמים, כאשר X שווה למספר ה- "6" שהתקבלו.

3. מילוי טופס בחינת ה- FRM הראשונה, כאשר X שווה למספר הניחושים הנכונים (מתוך 100 שאלות).

4. ניסוי 4: הטלת מטבע הוגן, כאשר X שווה למספר הניסיונות עד לקבלת עץ בפעם הראשונה (כולל).

- למעשה מדובר באותה תופעה עם פרמטרים שונים:

$P_i = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ ההסתברות להצלחה בודדת $n_i = 3, 4, 100, \infty$ מספר הניסיונות $i = 1, 2, 3, 4$ ניסוי

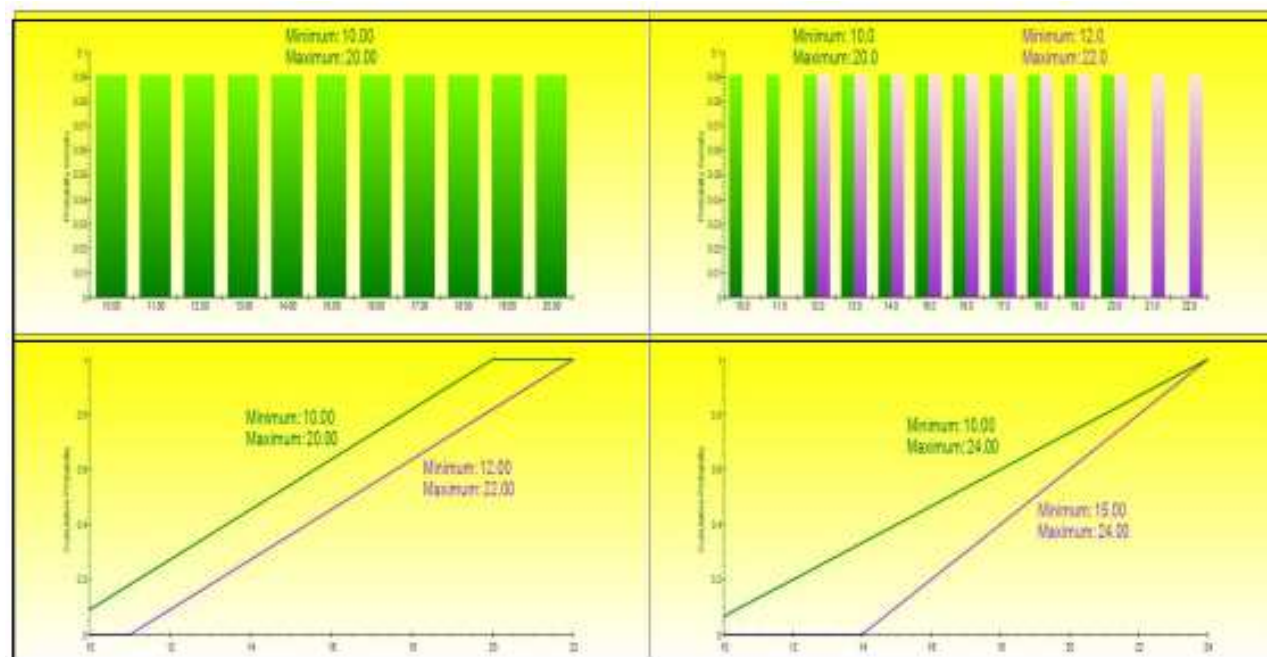
התפלגות אחידה בדידה (Discrete Uniform Distribution)

- ההתפלגות האחידה הבדידה נקראת גם מרחב התפלגות אחיד, כאשר להתפלגות זו יש קבוצה של N אלמנטים ולכל אלמנט יש את אותה ההסתברות.
- התפלגות זו קשורה להתפלגות האחידה הרציפה אך האלמנטים של ההתפלגות האחידה הבדידה, כשמם כן הם, בדידים ולא רציפים (גרגירי חומס ולא ממרח חומס).
- בהתפלגות אחידה בדידה כל הערכים נופלים בין המינימום והמקסימום (כולל) ומתרחשים בסבירות זהה.
- להתפלגות האחידה יש שלושה תנאים בסיסיים:
 1. הערך המינימלי הוא קבוע ואינו משתנה.
 2. הערך המקסימלי הוא קבוע ואינו משתנה.

התפלגות אחידה בדידה (Discrete Uniform Distribution)

3. כל הערכים בין המינימום והמקסימום (כולל) מתרחשים בסבירות זהה.

- הערך המקסימלי (Max) והערך המינימלי (Min) הם הפרמטרים היחידים המגדירים את כל ההתפלגות.



התפלגות אחידה בדידה (Discrete Uniform Distribution)

- התפלגות אחידה מתארת משתנה מקרי שמקבל בהסתברות שווה את כל הערכים שלו, כאשר הקפיצות בערכים הן בגודל אחד.

- אם X מפולג (distributed) אחיד בקטע סגור $X \sim U[M, N]$

הערך $N =$ המקסימלי $M =$ המינימלי הערך

- אזי:

Handwritten formula for the probability mass function $P_X(x)$ of a discrete uniform distribution. The formula is:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{N-M+1} & x = M, M+1, \dots, N \\ 0 & \text{אחר} \end{cases}$$
 The word 'אחר' (Other) is written below the second case. The variable x is defined as $x = M, M+1, \dots, N$.

$$E(X) = \frac{N + M}{2} \quad V(X) = \frac{(N - M + 1)^2 - 1}{12}$$

תרגיל כיתה 13

- ידוע כי התוצאה המתקבלת בהטלה אחת של קובייה הוגנת הינה משתנה מקרי המפולג אחיד בדיד בקטע סגור $[1,6]$.
- חשב את התוחלת, השונות וסטיית התקן של המשתנה המקרי.

פתרון תרגיל כיתה 13

- ידוע כי התוצאה המתקבלת בהטלה אחת של קובייה הוגנת הינה משתנה מקרי המפולג אחיד בדיד בקטע סגור $[1,6]$.
- חשב את התוחלת, השונות וסטיית התקן של המשתנה המקרי.

$$X \sim U[1,6]$$

$$E(X) = \frac{N + M}{2} = \frac{6 + 1}{2} = 3.5$$

$$V(X) = \frac{(N - M + 1)^2 - 1}{12} = \frac{(6 - 1 + 1)^2 - 1}{12} = \frac{35}{12} = 2.92$$

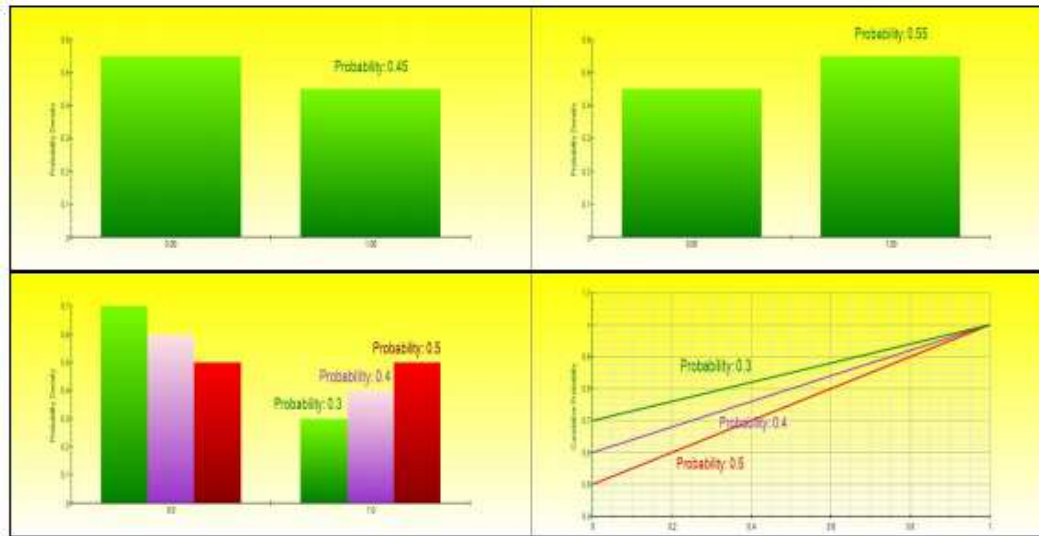
$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.92} = 1.71$$

התפלגות ברנולי (Bernoulli or Yes/No Distribution)

- התפלגות ברנולי היא התפלגות בדידה עם שתי תוצאות (למשל, עץ או פאלי, הצלחה או כישלון, 0 או 1).
- התפלגות ברנולי היא מקרה פרטי של ההתפלגות הבינומית עם ניסוי אחד והיא משמשת לסימלוציה (simulate, יצירת סימולציות) תנאים מסוג כן/לא או הצלחה/כישלון.
- התפלגות זו משמשת כבסיס להתפלגויות אחרות מורכבות יותר.
- ההתפלגות הבינומית: זוהי התפלגות ברנולי אך עם מספר גבוה יותר של סך n ניסיונות, המחשבת את ההסתברות להצלחה מתוך סך מספר הניסיונות.
- ההתפלגות הגיאומטרית: זוהי התפלגות ברנולי אך עם מספר גבוה יותר של סך n ניסיונות, המחשבת את מספר הכישלונות הדרוש עד להצלחה הראשונה (כולל).

התפלגות ברנולי (Bernoulli or Yes/No Distribution)

- ההתפלגות הבינומית השלילית: זוהי התפלגות ברנולי אך עם מספר גבוה יותר של סך n ניסיונות, המחשבת את מספר הכישלונות הדרוש עד להצלחה ה- r (כולל).
- ההסתברות להצלחה (p) היא הפרמטר היחיד המגדיר את כל ההתפלגות.
- חשוב לציין כי בהתפלגות ברנולי יש רק ניסוי אחד ועל כן התוצאה היא 0 או 1.



התפלגות ברנולי (Bernoulli or Yes/No Distribution)

- ניסוי ברנולי יכול להסתיים באחת מ-2 תוצאות אפשריות: הצלחה או כישלון. ההסתברות להצלחה היא p וההסתברות לכישלון היא $q = (1-p)$.

- אם X מפולג ברנולי עם פרמטר p

$$X \sim \text{Ber}(1, p)$$

$$P(n) = \begin{cases} 1-p & \text{for } x=0 \\ p & \text{for } x=1 \end{cases}$$

or

$$P(n) = p^x (1-p)^{1-x}$$

$$\text{Mean} = p$$

$$\text{Standard Deviation} = \sqrt{p(1-p)}$$

$$\text{Skewness} = \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}} \quad \text{Excess Kurtosis} = \frac{6p^2 - 6p + 1}{p(1-p)}$$

• אזי:

תרגיל כיתה 14

- ידוע כי מצב של הגעה לחדלות פירעון עבור חברה מסויימת מפולג ברנולי עם פרמטר 0.12.
- חשב את סטיית התקן של ההסתברות השולית לחדלות פירעון של החברה.

פתרון תרגיל כיתה 14

- ידוע כי מצב של הגעה לחדלות פירעון עבור חברה מסויימת מפולג ברנולי עם פרמטר 0.12.
- חשב את סטיית התקן של ההסתברות השולית לחדלות פירעון של החברה.

$$X \sim \text{Ber}(1, p = 0.12)$$

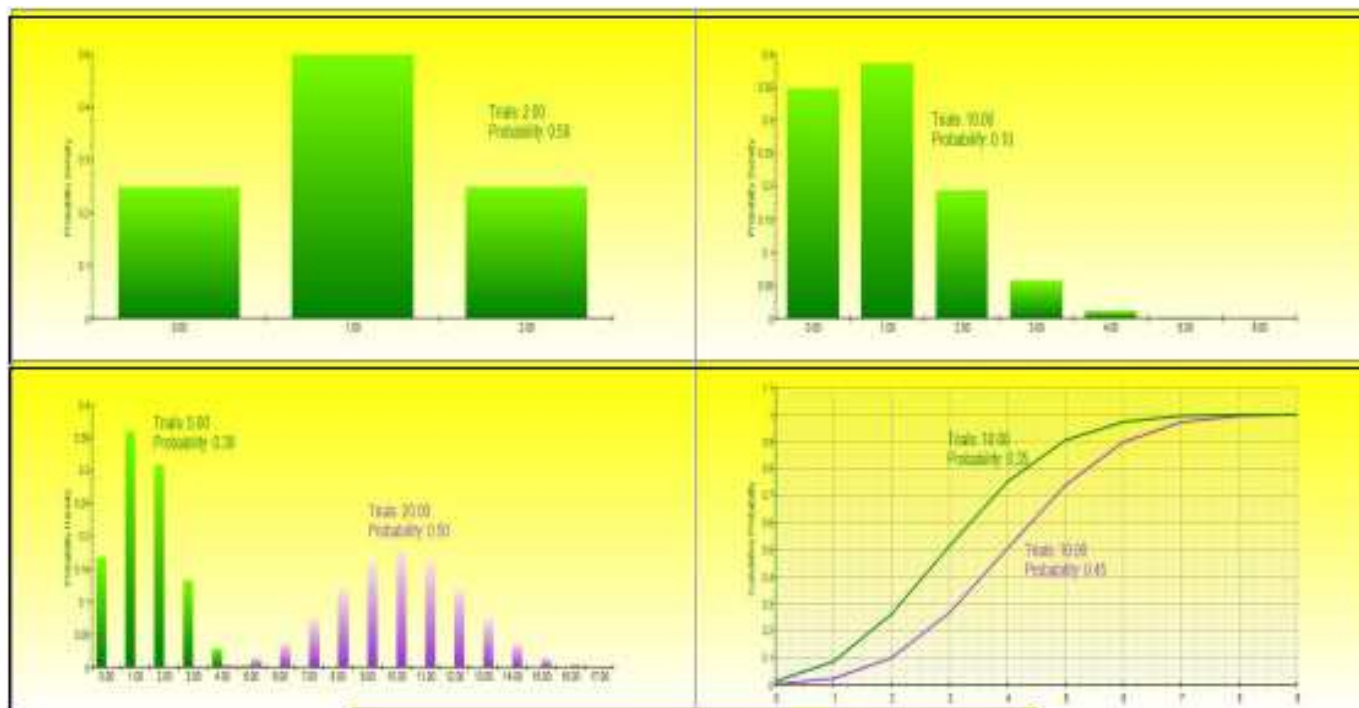
$$\sigma_X = \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{0.12(1-0.12)} = 0.34\%$$

התפלגות בינומית (Binomial Distribution)

- ההתפלגות הבינומית מתארת את מספר הפעמים שמאורע מסוים קורה מתוך מספר קבוע של ניסיונות, למשל מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "עץ" מתוך 10 הטלות מטבע או מספר הפריטים הפגומים מתוך 50 פריטים שנבחרו.
- להתפלגות הבינומית יש שלושה תנאים בסיסיים:
 1. לכל ניסוי יש רק שתי תוצאות אפשריות שהן מאורעות זרים.
 2. הניסויים הינם בלתי תלויים זה בזה, משמע, מה שקורה בניסוי הראשון לא משפיע על הניסוי השני.
 3. ההסתברות לקרות אירוע נשארת קבועה עבור כל ניסוי וניסוי.

התפלגות בינומית (Binomial Distribution)

- ההסתברות להצלחה (p) ומספר הניסיונות (n) הם הפרמטרים היחידים המגדירים את כל ההתפלגות.
- מספר ההצלחות מסומן ב- X , ויכול לקבל רק ערכים חיוביים.
- חשוב לציין כי ההסתברות להצלחה (p) נעה בין 0 ל-1.



התפלגות בינומית (Binomial Distribution)

- התפלגות הבינומית סופרת את מספר ה"הצלחות" בסדרה של n ניסויי ברנולי בלתי תלויים, עם סיכוי קבוע השווה ל- p להצליח בכל ניסוי.

- אם X מפולג בינומית עם פרמטרים n ו- p $X \sim \text{Bin}(n, p)$

- אזי:
$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)} \quad \text{for } n > 0; x = 0, 1, 2, \dots, n; \text{ and } 0 < p < 1$$

$$\text{Mean} = np$$

$$\text{Standard Deviation} = \sqrt{np(1-p)}$$

$$\text{Skewness} = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$\text{Excess Kurtosis} = \frac{6p^2 - 6p + 1}{np(1-p)}$$

תרגיל כיתה 15

- הבחינה הראשונה (Exam Part I) של האיגוד העולמי למומחי סיכונים (GARP) להסמכה הבינלאומית "מנהל סיכונים פיננסיים" (FRM®) מורכבת מ-100 שאלות רבות ברירה.
- לכל שאלה יש 4 תשובות אפשריות (a, b, c, d), כאשר רק אחת מהן נכונה וכל השאר שגויות.
- CRO של בנק גדול מעוניין לגשת לבחינה, אך היות ואין לו זמן להתכונן בצורה רצינית לבחינה הוא בוחר להשתמש **במתודת "סלבה"** (קרי, לסמן בכל השאלות את התשובה c) ובכל זאת לגשת.
- אם ידוע כי מספר הניחושים המוצלחים בבחינת ה-FRM מפולג בינומי עם הפרמטרים $n=100$ ו- $p=0.25$, מהי ההסתברות של ה-CRO לנחש נכון 70 שאלות בבחינה?

פתרון תרגיל כיתה 15

$$X \sim \text{Bin}(n = 100, p = 0.25)$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X = 70) = \binom{100}{70} (0.25)^{70} (1-0.25)^{100-70} = \frac{100!}{70!30!} (0.25)^{70} (0.75)^{30}$$

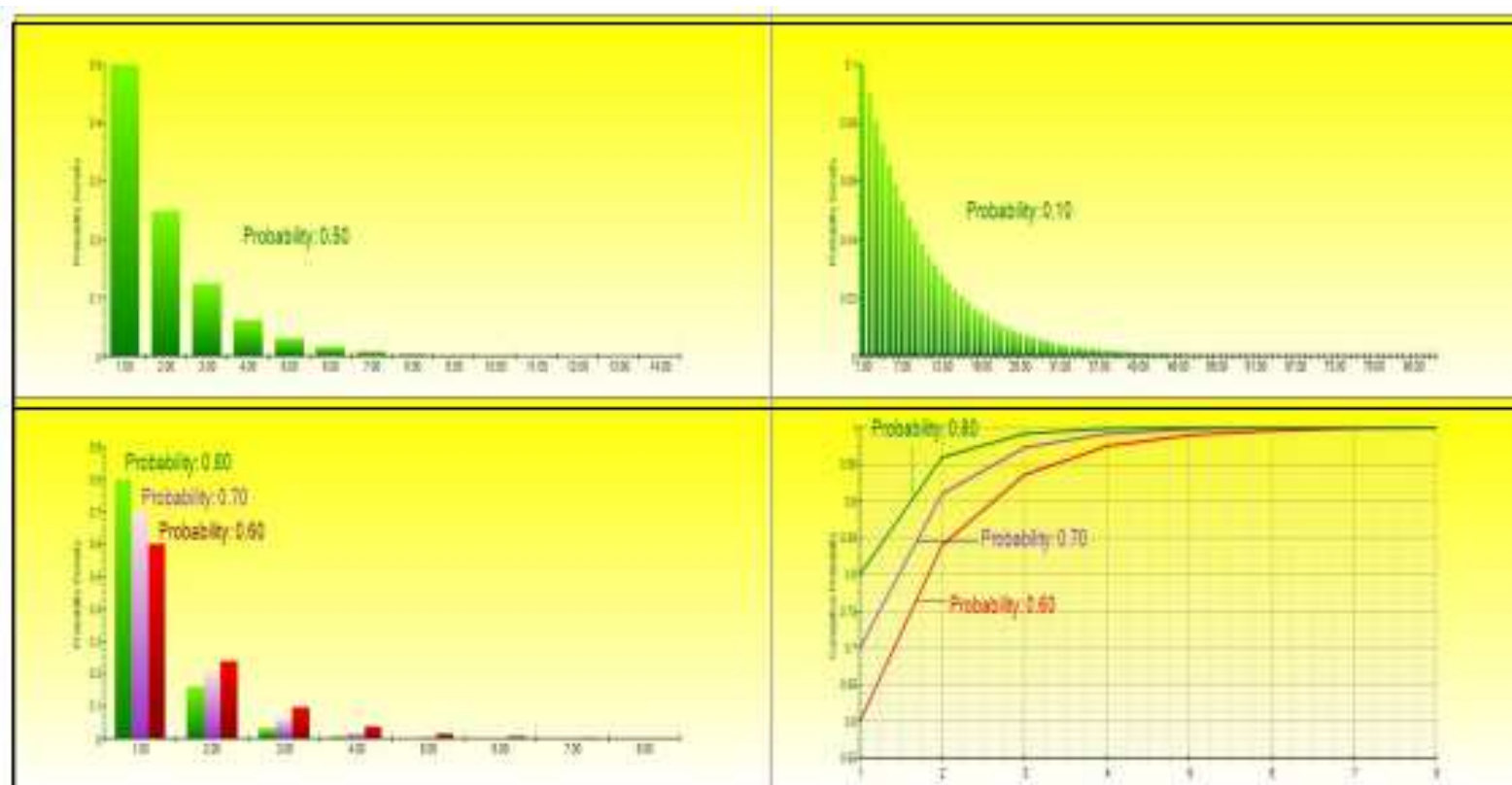
$$= 0.000000000\ 0000000000\ 0037634 = 0.000000000\ 0000000000\ 37634\%$$

התפלגות גיאומטרית (Geometric Distribution)

- ההתפלגות הגיאומטרית מתארת את מספר הניסיונות עד לקרות ההצלחה הראשונה (למשל, מספר הפעמים שנדרש לסובב את גלגל הרולטה עד שנזכה).
- להתפלגות הגיאומטרית יש שלושה תנאים בסיסיים:
 1. מספר הניסיונות אינו קבוע.
 2. הניסיונות נמשכים עד להצלחה הראשונה (כולל).
 3. ההסתברות להצלחה נשארת קבועה עבור כל ניסוי וניסוי.

התפלגות גיאומטרית (Geometric Distribution)

- ההסתברות להצלחה (p) היא הפרמטר היחיד המגדיר את כל ההתפלגות.
- מספר הניסיונות מסומן ב- X , שיכול לקבל רק מספרים חיוביים.



התפלגות גיאומטרית (Geometric Distribution)

- מבצעים סדרה של ניסויי ברנולי בלתי תלויים, ברגע שיש "הצלחה" מפסיקים. לאמור- משתנה מקרי המפולג גיאומטרי סופר את מספר הניסיונות עד ל"הצלחה" ראשונה כולל הניסוי שבו הייתה ההצלחה, כאשר הניסיונות הינם ניסויי ברנולי בלתי תלויים, והסיכוי להצליח בכל ניסוי קבוע ושווה ל- p .
- בהתפלגות הבינומית אומרים לנו כמה ניסיונות היו בעוד שבהסתברות הגיאומטרית אנו מגלים את מספר הניסיונות.
- ההתפלגות הגיאומטרית מתאפיינת בתכונת חוסר הזיכרון (memoryless), משמע, ההסתברות המותנית שידרשו לי יותר מ- 10 ניסיונות עד להצלחה ראשונה (כולל) בהינתן שכבר נכשלתי 7 פעמים שווה להסתברות השולית (הלא מותנית) שידרשו לי יותר מ- 3 ניסיונות עד להצלחה ראשונה (כולל).

התפלגות גיאומטרית (Geometric Distribution)

• אם X מפולג גיאומטרי עם פרמטר p $X \sim G(p)$

• אזי: $P(x) = p(1-p)^{x-1}$ for $0 < p < 1$ and $x = 1, 2, \dots, n$

$$\text{Mean} = \frac{1}{p} - 1$$

$$\text{Standard Deviation} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$$

$$\text{Skewness} = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$$

$$\text{Excess Kurtosis} = \frac{p^2 - 6p + 6}{1-p}$$

תרגיל כיתה 16

- לא עברת את בחינת ה-FRM והחלטת לנסוע לקזינו בבורגס על מנת "לתפוס אויר בשביל לחזור לעבודה" (כמאמר השיר הידוע "פסק זמן" של אריק איינשטיין). היות ושילמת על בחינת ה-FRM \$400 החלטת להחזיר לעצמך את הכסף בהימורים על הספרה "4" שתתקבל בהטלת קובייה הוגנת (כבר אמרנו בורגס).
 - בהינתן כי מספר הניסיונות עד להצלחה ראשונה (קרי, קבלת הספרה "4") כולל מפולג גיאומטרי עם הפרמטר $p=1/6$:
1. מה ההסתברות שידרשו לך לכל היותר 5 ($X \leq 5$) ניסיונות עד לקבלת הספרה "4" בפעם הראשונה?
 2. הקוביה הוטלה פעמיים ולא יצא "4" מה ההסתברות שידרשו לכל היותר 5 ($X \leq 5$) ניסיונות עד לקבלת הספרה "4" בפעם הראשונה?

פתרון תרגיל כיתה 16

$$X \sim G(p = 1/6) \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad .1$$

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$$

$$P(X \leq 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{1-1} = 0.17 \quad P(X = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{2-1} = 0.14$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1} = 0.12 \quad P(X = 4) = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-1} = 0.10$$

$$P(X = 5) = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-1} = 0.08$$

$$P(X \leq 5) = 0.17 + 0.14 + 0.12 + 0.10 + 0.08 = 0.60$$

פתרון תרגיל כיתה 16

$$P(X \leq 5 / X > 2) = 1 - P(X > 5 / X > 2) = 1 - P(X > 3) = P(X \leq 3) \quad .2$$

משתמשים בתכונת חוסר הזיכרון

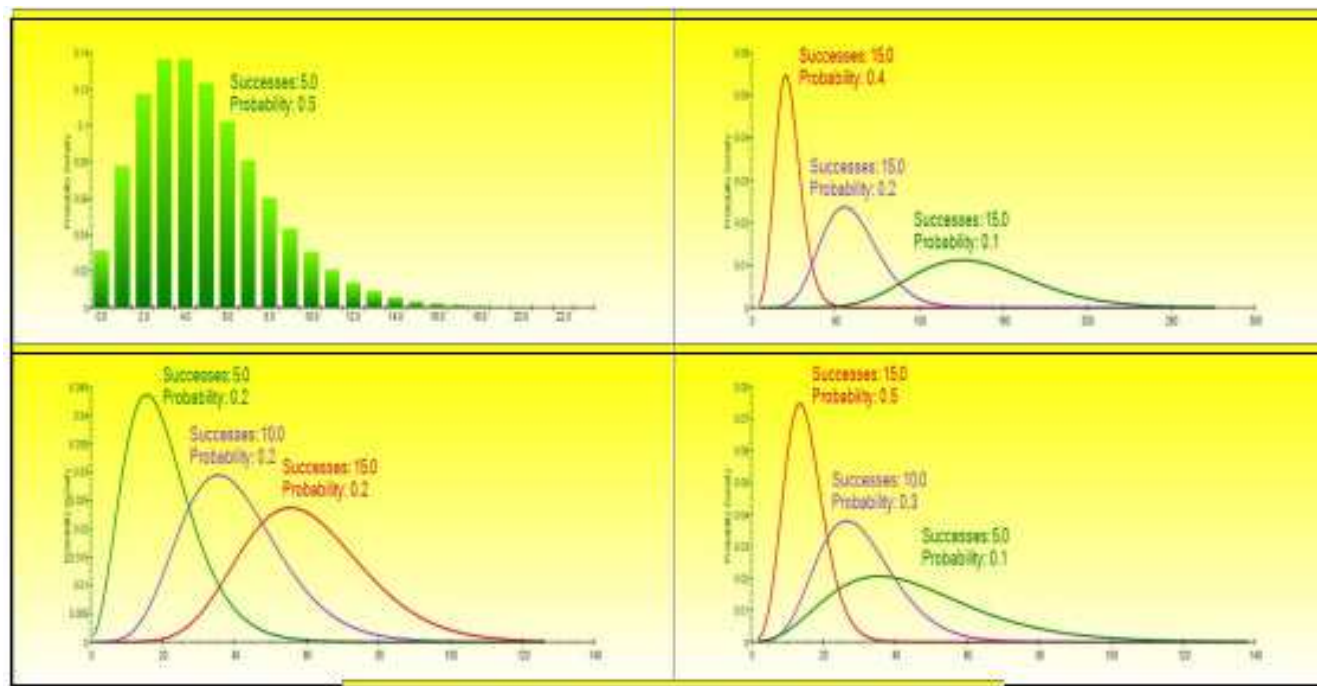
$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.42$$

התפלגות בינומית שלילית (*Negative Binomial Distribution*)

- מבצעים סדרה של ניסויי ברנולי בלתי תלויים, עם סיכוי קבוע השווה ל- p להצליח בכל ניסוי, עד ל"הצלחה" מספר r .
- משתנה מקרי המפולג בינומי שלילי סופר את מספר הניסיונות עד לקבלת "הצלחה" מספר r כולל, כאשר עם קבלת הצלחה מספר r הניסוי נפסק.
- למשל, אם נדרשו יותר מ-10 ניסיונות עד שהתקבלה הצלחה מספר 3, זה כמו לומר שב-10 הניסיונות הראשונים התקבלו לכל היותר 2 הצלחות.
- להתפלגות בינומית שלילית יש שלושה תנאים בסיסיים:
 1. מספר הניסיונות אינו קבוע.
 2. הניסיונות נמשכים עד להצלחה ה- r (כולל).

התפלגות בינומית שלילית (*Negative Binomial Distribution*)

3. ההסתברות להצלחה נשארת קבועה בין ניסוי לניסוי.
- ההסתברות להצלחה (p) ומספר ההצלחות (r) הם הפרמטרים היחידים המגדירים את כל ההתפלגות.
 - מספר הניסיונות מסומן ב- X , שיכול לקבל רק מספרים חיוביים.



התפלגות בינומית שלילית (Negative Binomial Distribution)

• אם X מפולג בינומית שלילית עם פרמטרים p ו- r

• אזי:
 $X \sim \text{NB}(r, p)$

$$P(x) = \frac{(x+r-1)!}{(r-1)!x!} p^r (1-p)^x \quad \text{for } x = r, r+1, \dots; \text{ and } 0 < p < 1$$

$$\text{Mean} = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$\text{Standard Deviation} = \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}}$$

$$\text{Skewness} = \frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}$$

$$\text{Excess Kurtosis} = \frac{p^2 - 6p + 6}{r(1-p)}$$

תרגיל כיתה 17

- הסיכוי שחבר בועדת ההיגוי של GARP בעד ש-GARP יכיר בבחינות האיגוד הישראלי למנהלי סיכונים כשקילות לבחינות של GARP הוא 20%.
- עוצרים את הסקר כשמוצאים 2 תומכים.
- בהינתן כי מספר החברים בועדת ההיגוי שנשאלו בסקר מפולג בינומי שלילי עם הפרמטרים $r=2$ ו- $p=0.2$:
- מהי ההסתברות שמספר הנשאלים עד למציאת 2 התומכים (כולל) יהיה גדול מ- 7?

פתרון תרגיל כיתה 17

$X =$ מספר החברים ששאלנו

$$X \sim \text{NB}(r = 2, p = 0.2) \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

$Y =$ מספר התומכים מבין 7 הנשאלים

$$P(X > 7) = P(Y \leq 1) = P_Y(0) + P_Y(1)$$

$$Y \sim \text{Bin}(n = 7, p = 0.2) \quad P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

$$P_Y(Y) = \binom{7}{y} \cdot (0.2)^y \cdot (0.8)^{7-y}$$

$$P_Y(Y = 0) = \binom{7}{0} \cdot (0.2)^0 \cdot (0.8)^{7-0} = 0.21$$

$$P_Y(Y = 1) = \binom{7}{1} \cdot (0.2)^1 \cdot (0.8)^{7-1} = 0.37$$

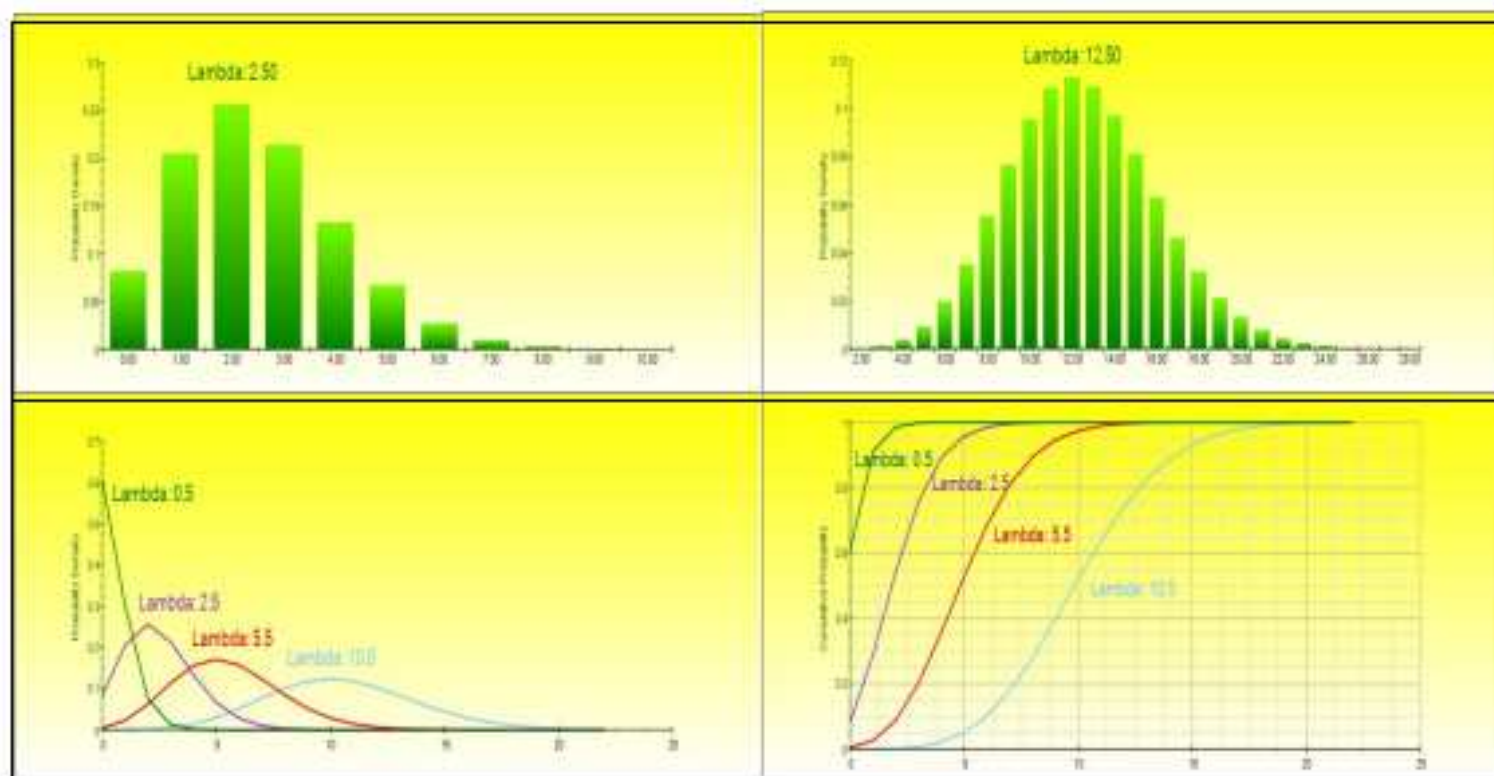
$$P(X > 7) = P(Y \leq 1) = 0.21 + 0.37 = 0.58$$

התפלגות פואסון (Poisson Distribution)

- ההתפלגות הפואסונית מתארת את מספר הפעמים שאירוע קורה במרווח (interval) נתון, כמו למשל מספר שיחות הטלפון לדקה הזורמות למוקד שירות לקוחות או מספר הטעויות בעמוד מסמך.
- להתפלגות הפואסונית יש שלושה תנאים בסיסיים:
 1. מספר המופעים האפשריים בכל מרווח אינו מוגבל.
 2. המופעים הינם בלתי תלויים זה בזה. מספר המופעים במרווח אחד אינו משפיע על מספר המופעים במרווחים האחרים.
 3. מספר המופעים הממוצע חייב להישאר קבוע בין מרווח אחד לשני.

התפלגות פואסון (Poisson Distribution)

- מספר המופעים הממוצע לאורך זמן (λ) הוא הפרמטר היחיד המגדיר את כל ההתפלגות.
- מספר המופעים מסומן ב- X , ויכול לקבל רק ערכים חיוביים.



התפלגות פואסון (Poisson Distribution)

- משתנה מקרי המפולג פואסון סופר ארועים (מופעים) ביחידת זמן, בהנחה שמספר המופעים ליחידת זמן קבוע ושווה ל- λ .
- למשל, מספר שיחות הטלפון המגיעות למרכזיה (נניח 2 שיחות בממוצע לדקה).
- פואסון היה פיסיקאי צרפתי שעבד עם חומרים רדיואקטיביים ובדק את קצב פליטתם של חלקיקים רדיואקטיביים לאורך זמן.
- כעיקרון, לא ניתן לזהות התפלגות פואסון, לכן נקבל את זה כנתון אם וכאשר.
- כל התפלגות של מספר מופעים ממוצע לאורך זמן אינסופי יש לה פוטנציאל מידול כהתפלגות פואסון או תהליך פואסון.

התפלגות פואסון (Poisson Distribution)

- בנוסף, אם מספר השיחות הזורמות למוקד שירות בדקה הוא 2 בממוצע, אזי מספר השיחות הזורמות למוקד שירות ברבע שעה (15 דקות) הוא 30 (= 2x15) בממוצע.

- אם X מפולג פואסונית עם פרמטר λ $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$

- אזי:
$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \text{ for } x \text{ and } \lambda > 0$$

$$\text{Mean} = \lambda$$

$$\text{Standard Deviation} = \sqrt{\lambda}$$

$$\text{Skewness} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\text{Excess Kurtosis} = \frac{1}{\lambda}$$

תרגיל כיתה 18

- מספר הישראלים שעוברים בהצלחה את כל בחינות ה-FRM הינו 2 בממוצע כל שנה.

1. מה ההסתברות שבשנה הבאה אף אחד לא יעבור את כל בחינות ה-FRM (קרי, יעבור רק את חלקן אך לא את כולן)?

2. מה ההסתברות שבשנה הבאה יעברו בהצלחה את כל בחינות ה-FRM לפחות 3 ישראלים?

פתרון תרגיל כיתה 18

$$X \sim \text{Poiss}(\lambda = 2) \quad x = 0, 1, \dots \quad .1$$

$$P_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{2^x e^{-2}}{x!}$$

$$P(0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} = 0.14$$

.2

$$P_X(X \geq 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$$

$$P(1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 2e^{-2}$$

$$P(2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 2e^{-2}$$

$$1 - e^{-2} - 2e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 5e^{-2} = 0.32$$

תודה על ההקשבה.



בהצלחה בכל בחינות

ה-FRM!

מבנה ההרצאה

- אלגברה של מאורעות
- הפסקה (5-10 דקות)
- הסתברויות
- הפסקה (5-10 דקות)
- משתנים מקריים
- הפסקה (5-10 דקות)
- התפלגויות בדידות
- הביתה

נספח שאלות לבית **(אל דאגה - כולל פתרונות)**

שאלת בית 1

Example: Multiplication rule

Consider the following information:

- $P(I) = 0.4$, probability of the monetary authority increasing interest rates (I) is 40%.
- $P(R | I) = 0.7$, probability of a recession (R) given an increase in interest rates is 70%.

What is $P(RI)$, the joint probability of a recession *and* an increase in interest rates?

פתרון שאלת בית 1

Applying the multiplication rule, we get the following result:

$$P(RI) = P(R | I) \times P(I)$$

$$P(RI) = 0.7 \times 0.4$$

$$P(RI) = 0.28$$

Don't let the cumbersome notation obscure the simple logic of this result. If an interest rate increase will occur 40% of the time and lead to a recession 70% of the time when it occurs, the joint probability of an interest rate increase and a resulting recession is $(0.4)(0.7) = (0.28) = 28\%$.

שאלת בית 2

Example: Addition rule

Using the information in our previous interest rate and recession example and the fact that the unconditional probability of a recession, $P(R)$, is 34%, determine the probability that either interest rates will increase *or* a recession will occur.

פתרון שאלת בית 2

Given that $P(R) = 0.34$, $P(I) = 0.40$, and $P(RI) = 0.28$, we can compute $P(R \text{ or } I)$ as follows:

$$P(R \text{ or } I) = P(R) + P(I) - P(RI)$$

$$P(R \text{ or } I) = 0.34 + 0.40 - 0.28$$

$$P(R \text{ or } I) = 0.46$$

שאלת בית 3

Example: Joint probability for more than two independent events

What is the probability of rolling three 4s in one simultaneous toss of three dice?

פתרון שאלת בית 3

Since the probability of rolling a 4 for each die is $1/6$, the probability of rolling three 4s is:

$$P(\text{three 4s on the roll of three dice}) = 1/6 \times 1/6 \times 1/6 = 1/216 = 0.00463$$

Similarly:

$$P(\text{four heads on the flip of four coins}) = 1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/16 = 0.0625$$

שאלת בית 4

Example: Bayes' formula

Electcomp Corporation manufactures electronic components for computers and other devices. There is speculation that Electcomp is about to announce a major expansion into overseas markets. The expansion will occur, however, only if Electcomp's managers estimate overseas demand to be sufficient to support the necessary sales. Furthermore, if demand is sufficient and overseas expansion occurs, Electcomp is likely to raise its prices.

פתרון שאלת בית 4

Using O to represent the event of overseas expansion, I to represent a price increase, and I^c to represent no price increase, an industry analyst has estimated the unconditional and conditional probabilities shown as follows:

$$P(I) = 0.3$$

$$P(I^c) = 0.7$$

$$P(O | I) = 0.6$$

$$P(O | I^c) = 0.4$$

The analyst's estimates for $P(I)$ and $P(I^c)$ are called the *priors* because they reflect what is already known. They do not reflect the current information about the possible overseas expansion.

פתרון שאלת בית 4

Application of Bayes' formula allows us to compute $P(I | O)$, the probability that prices will increase given that Electcomp announces that it will expand overseas (the new information). Using the multiplication rule, we can express the joint probability of I and O :

$$P(O | I) = P(IO) / P(I), \text{ and } P(IO) = P(I | O) \times P(O)$$

Based on these relationships, Bayes' formula can be expressed using the information from this example as indicated below [i.e., substitute the second equation into the first [for $P(IO)$] and solve for $P(I | O)$]:

$$P(I | O) = \frac{P(O | I)}{P(O)} \times P(I)$$

פתרון שאלת בית 4

In order to solve this equation, $P(O)$ must be determined. This can be done in the following manner:

$$P(O) = P(O | I) \times P(I) + P(O | I^c) \times P(I^c)$$

$$P(O) = (0.6 \times 0.3) + (0.4 \times 0.7)$$

$$P(O) = 0.46$$

Now the updated probability of the increase in prices given that Electcomp expands overseas can be computed:

$$P(I | O) = \frac{0.60}{0.46} \times 0.30 = 0.3913$$

This means that if the new information of "expand overseas" is announced, the prior probability estimate of $P(I) = 0.30$ must be increased to 0.3913.

שאלת בית 5 + פתרון

Example: Evaluating a probability function

Consider the following function: $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $p(x) = \frac{x}{10}$, else $p(x) = 0$

Determine whether this function satisfies the conditions for a probability function.

Answer:

Note that all of the probabilities are between 0 and 1, and the sum of all probabilities equals 1:

$$\sum p(x) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 = 1$$

Both conditions for a probability function are satisfied.

שאלת בית 6 + פתרון

Example: Discrete uniform distribution

Determine $p(6)$, $F(6)$, and $P(2 \leq X \leq 8)$ for the discrete uniform distribution function defined as:

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10\}, p(x) = 0.2$$

Answer:

$p(6) = 0.2$, since $p(x) = 0.2$ for all x . $F(6) = P(X \leq 6) = np(x) = 3(0.2) = 0.6$. Note that $n = 3$ since 6 is the third outcome in the range of possible outcomes. $P(2 \leq X \leq 8) = 4(0.2) = 0.8$. Note that $k = 4$, since there are four outcomes in the range $2 \leq X \leq 8$. The figures below illustrate the concepts of a probability function and cumulative distribution function for this distribution.

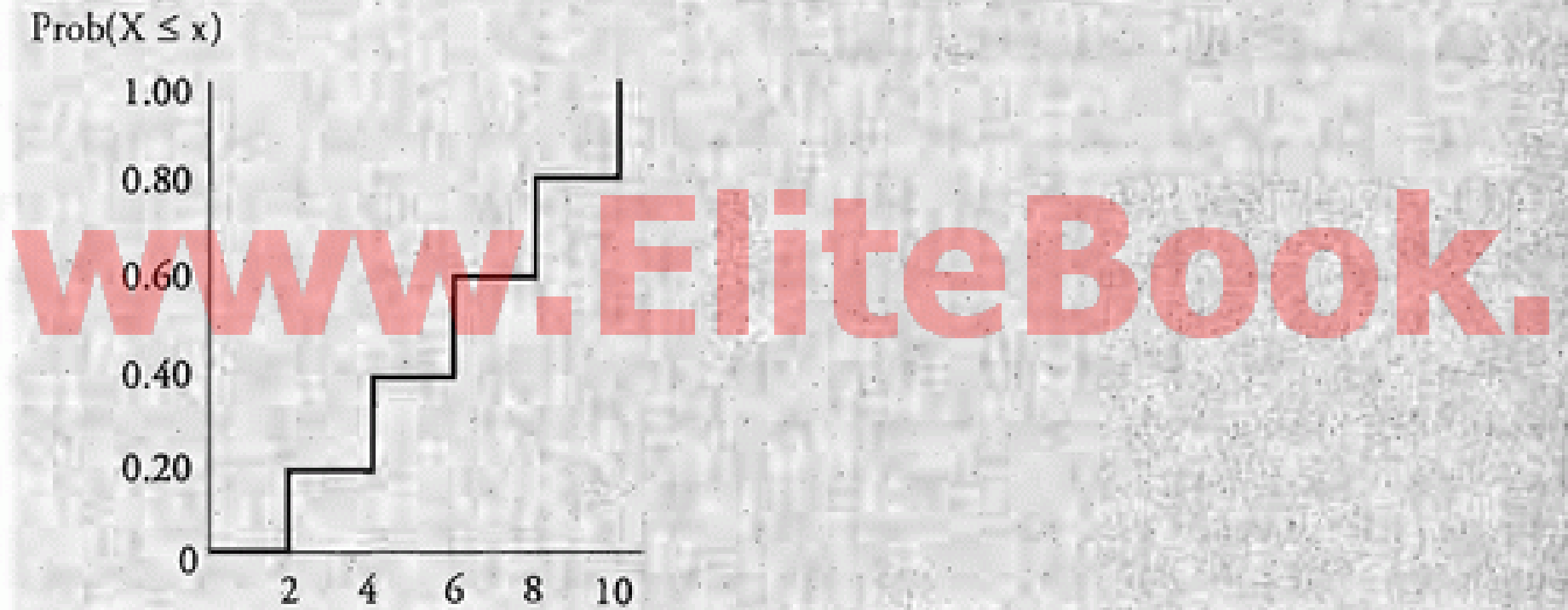
פתרון שאלת בית 6

Figure 5: Probability and Cumulative Distribution Functions

$X = x$	<i>Probability of x</i> $Prob(X = x)$	<i>Cumulative Distribution Function</i> $Prob(X \leq x)$
2	0.20	0.20
4	0.20	0.40
6	0.20	0.60
8	0.20	0.80
10	0.20	1.00

פתרון שאלת בית 6

Figure 6: Cumulative Distribution Function for $X \sim \text{Uniform } \{2, 4, 6, 8, 10\}$



שאלת בית 7 + פתרון

If events A and B are mutually exclusive, then:

- A. $P(A | B) = P(A)$.
- B. $P(A | B) = P(B)$.
- C. $P(AB) = P(A) \times P(B)$.
- D. $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$.

D There is no intersection of events when events are mutually exclusive. $P(AB) = P(A) \times P(B)$ is only true for independent events. Note that since A and B are mutually exclusive (cannot both happen), $P(A|B)$ and $P(AB)$ must both be equal to zero, making answers A, B, and C incorrect.

שאלת בית 8 + פתרון

At a charity ball, 800 names were put into a hat. Four of the names are identical. On a random draw, what is the probability that one of these four names will be drawn?

- A. 0.004.
- B. 0.005.
- C. 0.010.
- D. 0.025.

B $P(\text{name 1 or name 2 or name 3 or name 4}) = 1/800 + 1/800 + 1/800 + 1/800 = 4/800 = 0.005$

שאלת בית 9 + פתרון

Two events are said to be independent if the occurrence of one event:

- A. means that the second event cannot occur.
- B. means that the second event is certain to occur.
- C. affects the probability of the occurrence of the other event.
- D. does not affect the probability of the occurrence of the other event.

D Two events are said to be independent if the occurrence of one event does not affect the probability of the occurrence of the other event.

שאלת בית 10

An analyst determines that there is a 60% chance that the economy will grow and that there is a 40% chance the economy will go into a recession. If the economy grows, there is a 70% chance that SCU stock will rise in price and a 30% chance it will fall in price. If a recession occurs, there is a 20% chance SCU's stock price will rise and an 80% chance the price will fall. Given that SCU stock has risen in price, what is the probability the economy has grown?

- A. 32%.
- B. 56%.
- C. 74%.
- D. 84%.

פתרון שאלת בית 10

D We are looking to find $P(G|U)$, the probability the economy grows given that SCU stock is up.

$P(G)$ = probability the economy grows = 0.60

$P(R)$ = probability of a recession = 0.40

$P(U|G)$ = probability the stock is up given the economy grows = 0.70

$P(U|R)$ = probability the stock is up given the economy goes into a recession = 0.20

Using Bayes' formula:

$$P(G|U) = P(G) \times P(U|G) / [P(G) P(U|G) + P(R) P(U|R)]$$

$$P(G|U) = (0.60) \times (0.70) / [(0.60)(0.70) + (0.40)(0.20)]$$

$$P(G|U) = 0.42 / 0.5 = 0.84 = 84.0\%$$

Note that the 0.5 in the denominator is just $P(U)$.

שאלת בית 11

Example: Expected earnings per share

The probability distribution of EPS for Ron's Stores is given in the figure below. Calculate the expected earnings per share.

Figure 1: EPS Probability Distribution

Probability	Earnings Per Share
10%	£1.80
20%	£1.60
40%	£1.20
30%	£1.00
100%	

פתרון שאלת בית 11

The expected EPS is simply a weighted average of each possible EPS, where the weights are the probabilities of each possible outcome.

$$E[\text{EPS}] = 0.10(1.80) + 0.20(1.60) + 0.40(1.20) + 0.30(1.00) = \text{£}1.28$$

שאלת בית 12 + פתרון

Example: Computing variance

What is the variance of the sum of points in tossing a pair of coins if heads = 2 points and tails = 10 points?

Answer:

Let X and Y be the points corresponding with the two sides of the coin.

$$\text{Note that } \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = (2^2 \times 0.5) + (10^2 \times 0.5) = 2 + 50 = 52$$

$$E(X) = (2 \times 0.5) + (10 \times 0.5) = 6$$

$$\text{Hence, } \text{Var}(X) = 52 - (6^2) = 16$$

שאלת בית 13 + פתרון

XYZ Corp. Annual Stock Prices					
1995	1996	1997	1998	1999	2000
22%	5%	-7%	11%	2%	11%

Assuming that the distribution of XYZ stock returns is a population, what is the population variance (in percent squared)?

- A. 5.0.
- B. 6.8.
- C. 7.7.
- D. 80.2.

D The population variance, σ^2 , is found by taking the mean of all squared deviations from the mean.

$$\sigma^2 = \frac{[(22 - 7.3)^2 + (5 - 7.3)^2 + (-7 - 7.3)^2 + (11 - 7.3)^2 + (2 - 7.3)^2 + (11 - 7.3)^2]}{6}$$
$$= 80.2(\%^2)$$

שאלת בית 14 + פתרון

- נחשב את התוחלת של פונקציה ריבועית (X^2) ושל פונקציה לינארית ($2X+3$) עבור פונקציית ההסתברות הבאה:

x	0	1	2
$P_X(x)$	1/2	1/4	1/4

$$E(X^2) = \sum_{x=1} x^2 P_X(x) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \frac{1}{4}$$

$$E(2X + 3) = \sum_{x=1} (2x + 3) P_X(x) = (2 \cdot 0 + 3)^2 \times \frac{1}{2} + (2 \cdot 1 + 3)^2 \times \frac{1}{4} + (2 \cdot 2 + 3)^2 \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{4} + 7 \times \frac{1}{4} = \frac{18}{4} = 4 \frac{1}{2}$$

שאלת בית 15

- חברה אורזת סוכריות בשקיות.
- X הינו מספר הסוכריות בחבילה.

x	15	16	17	18
$P_X(x)$	0.18	0.41	0.32	0.09

1. חשב תוחלת ושונות של מספר הסוכריות בחבילה.
2. עלות הייצור (באגורות) של כל חבילת סוכריות היא מ"מ y המקיים $y = 4 + 2.5X$. חשב את התוחלת והשונות של עלות הייצור.
3. כל חבילה נמכרת ב- 50 אגורות. בהינתן ש- w הוא מ"מ המייצג את הרווח הנקי מחבילת סוכריות אחת, חשב את התוחלת והשונות של w .

פתרון שאלת בית 15

$$E(X) = \sum_x x \cdot P_X(x) = 15 \times 0.18 + 16 \times 0.41 + 0.32 \times 17 + 0.09 \times 18 = 16.32 \quad .1$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \cdot P_X(x) = 15^2 \times 0.18 + 16^2 \times 0.41 + \dots + 0.09^2 \times 18 = 267.1$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 267.1 - (16.32)^2 = 0.76$$

.2

$$E(y) = E(4 + 2.5X) = 4 + 2.5E(X) = 4 + 2.5 \cdot 16.32 = 44.8$$

$$V(y) = V(4 + 2.5X) = (2.5)^2 V(X) = 6.25 \cdot 0.76 = 4.74$$

.3

$$w = 50 - y$$

$$E(w) = E(50 - y) = 50 - E(y) = 50 - 44.8 = 5.2$$

$$V(w) = V(50 - y) = V(y) = 4.74$$

שאלת בית 16

- קיימות 2 מניות (A ו-B) להלן המחירים והתשואות שלהן.
 1. חשב את תוחלת התשואה של כל מניה.
 2. חשב את שונות התשואות של כל מניה.
 3. חשב את סטיית התקן של התשואות של כל מניה.
 4. חשב את השונות המשותפת (ה-Covariance) של תשואות שתי המניות.
 5. חשב את מקדם המתאם (ה-Correlation) בין רמת הסיכון של תשואות מניה A לבין רמת הסיכון של תשואות מניה B.

שנה	שער מניה A	שער מניה B	תשואת מניה A	תשואת מניה B
1990	150	200		
1991	160	215	6.7%	7.5%
1992	165	230	3.1%	7.0%
1993	172	260	4.2%	13.0%
1994	167	255	-2.9%	-1.9%
1995	180	270	7.8%	5.9%
1996	200	330	11.1%	22.2%
1997	178	320	-11.0%	-3.0%
1998	195	350	9.6%	9.4%
1999	210	340	7.7%	-2.9%
2000	215	400	2.4%	17.6%
2001	203	450	-5.6%	12.5%
2002	220	420	8.4%	-6.7%

פתרון שאלת בית 16

1. בהנחה כי התשואות בכל שנה אינן תלויות זו בזו ומהוות אמד טוב לעתיד, ניתן לחשב את תוחלת התשואה על סמך ביצועי העבר של כל מניה, כדלקמן:

$$E(R_A) = \frac{R_{1991}^A + R_{1992}^A + \dots + R_{2002}^A}{n_A} = 3.5\%$$

$$E(R_B) = \frac{R_{1991}^B + R_{1992}^B + \dots + R_{2002}^B}{n_B} = 6.7\%$$

- הערה: ביצענו חישוב של ממוצע **חשבוני**. קיימת נוסחה לחישוב ממוצע **הנדסי**, אולם נוסחה זו איננה רלוונטית לאמידת התשואה הצפויה בשנה הקרובה.
- שימו לב כי הענקנו משקל זהה לכל תצפית (1/12), אין זה הכרח, אולם שוב, כך בד"כ כך מקובל לבצע את החישוב.

פתרון שאלת בית 16

2. לאחר חישוב התוחלת ניתן גם לחשב את שונות התשואות, כדלקמן:

$$V(R_A) = \frac{[R_{1991}^A - E(R_A)]^2 + \dots + [R_{2002}^A - E(R_A)]^2}{(n_A - 1)} = 0.00454$$

$$V(R_B) = \frac{[R_{1991}^B - E(R_B)]^2 + \dots + [R_{2002}^B - E(R_B)]^2}{(n_B - 1)} = 0.00802$$

- הערה: על מנת לקבל אמד חסר הטייה, בחישוב שונות עבור מדגם, עלינו לחלק ב- $n-1$. אולם על מנת לקבל את הפרמטר באוכלוסייה (או אמד נראות מקסימלית) עלינו לחלק ב- n .
- יחידות המדידה של שונות התשואה אינן אחוזים כי אם אחוזים בריבוע!

פתרון שאלת בית 16

3. לאחר חישוב השונות ניתן לחשב את סטיית תקן של תשואות המניה כשורש הריבועי של שונות התשואות, כדלקמן:

$$\sigma(R_A) = \sqrt{V(R_A)} = \sqrt{0.00454} = 6.74\%$$

$$\sigma(R_B) = \sqrt{V(R_B)} = \sqrt{0.00802} = 8.96\%$$

- הערה: חשוב לזכור כי אמידת הנתונים ההיסטוריים אינה בהכרח רמז לבאות. אבל מקובל מאוד לבצע הערכות לגבי ההתנהגות הצפויה של הנכסים הפיננסים, על בסיס נתוני העבר.

פתרון שאלת בית 16

4. כעת נחשב את השונות המשותפת (ה- Covariance) של תשואות שתי המניות, כדלקמן:

$$COV(R_A, R_B) = \frac{\sum_{i=1991}^{2002} [R_i^A - E(R_A)] \cdot [R_i^B - E(R_B)]}{(n_A - 1)} = 0.00149$$

- הערה: לחובבי האקסל- שימו לב היטב באיזה נוסחאות אתם משתמשים (VAR/VARP , STDEV/STDEVP) במיוחד שימו לב לדרך החישוב של השונות המשותפת מאחר והאקסל מכיר רק נוסחה לשונות משותפת של האוכלוסייה (COVAR).

פתרון שאלת בית 16

5. לאחר חישוב השונות המשותפת (ה- Covariance) של תשואות שתי המניות, ניתן לחשב את מקדם המתאם (ה- Correlation) בין רמת הסיכון של תשואות מניה A לבין רמת הסיכון של תשואות מניה B, כדלקמן:

$$\rho(R_A, R_B) = \frac{COV(R_A, R_B)}{\sigma_{R_A} \cdot \sigma_{R_B}} = \frac{0.00149}{6.74\% \cdot 8.95\%} = 0.247$$

- הערה: מקדם המתאם נע בתחום שבין -1 ל- $+1$.
- ככל שמקדם המתאם גבוה יותר, הקשר בין תשואות הנכסים גבוה יותר.
- כאשר מקדם המתאם שלילי, אזי קיימת נטייה לתשואות הנכסים להתנהג בצורה הפוכה זה מזה.